



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**  
**COLEGIADO DE MATEMÁTICA**

**RELATÓRIO DAS ATIVIDADES DE METODOLOGIA E**  
**PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA -**  
**ESTÁGIO SUPERVISIONADO II**

Alexandre Batista de Souza

Cléia Fabiane Winck

Diessica Aline Quinot

Joel Ireno Branco

Cascavel- PR

2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET

Colegiado do Curso de Matemática

*Campus Cascavel*

RELATÓRIO DAS ATIVIDADES DE METODOLOGIA E  
PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA  
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor Orientador

Rafael Tavares Juliani

Cascavel - PR

2018

# RELATÓRIO DE ESTÁGIO

Relatório apresentado pelos acadêmicos Alexandre Batista de Souza, Cléia Fabiane Winck, Diessica Aline Quinot e Joel Ireno Branco, como parte integrante da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II.

Professor Orientador  
Rafael Tavares Juliani

Local de Execução:

Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Cascavel - Paraná

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por ter nos dado saúde e sabedoria para superar as dificuldades.

As nossas famílias, pelo amor e pelo incentivo que muito nos tem dado.

Aos professores do curso, em especial o professor orientador Rafael Tavares Juliani, pela disponibilidade de nos orientar e pelo tempo para conversas e acompanhamento indispensáveis para o desenvolvimento das atividades citadas no presente relatório.

E a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

## SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO.....	1
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	2
3.1 Plano de aula - 04/08/2018 .....	7
3.1.1 Encaminhamento Metodológico.....	7
3.1.2 Referências .....	19
3.1.3 Relatório .....	20
3.2 Plano de aula - 11/08/2018 .....	21
3.2.1 Encaminhamento Metodológico.....	21
3.2.2 Referências .....	31
3.2.3 Relatório – 11/08/2018 .....	31
3.3 Plano de aula - 18/08/2018 .....	32
3.3.1 Encaminhamento Metodológico.....	33
3.3.2 Referências .....	40
3.3.3 Relatório – 18/08/2018 .....	41
3.4 Plano de aula – 25/08/2018 .....	42
3.4.1 Encaminhamento Metodológico.....	42
3.4.2 Referências .....	51
3.4.3 Relatório – 25/08/2018 .....	51
3.5 Plano de aula - 01/09/2018 .....	52
3.5.2 Referências .....	64
3.5.3 Relatório 01/09/2018 .....	64
3.6 Plano de aula – 15/09/2018 .....	66
3.6.2 Referências .....	81
3.6.3 Relatório – 15/09/2018 .....	81
3.7 Plano de aula - 22/09/2018 .....	83
3.7.2 Referências .....	92
3.7.3 Relatório – 22/09/2018 .....	92
3.8 Plano de aula - 29/09/2018 .....	94
3.8.2 Referências .....	102
3.8.3 Relatório – 29/09/2018 .....	103
3.9 Plano de aula - 20/10/2018 .....	104
3.9.2 Referências .....	113
3.9.3 Relatório – 20/10/2018 .....	113
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	114

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	115
-------------------------------------	-----

## 1.INTRODUÇÃO

Este trabalho foi produzido durante o segundo semestre da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II e contém a descrição dos momentos nos quais exercemos a prática docente. O foco principal desse semestre estava na preparação e execução de onze aulas, as quais nove foram desenvolvidas no projeto PROMAT – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática, realizado no *Campus* da UNIOESTE de Cascavel aos sábados no período matutino. Os conteúdos abordados foram respectivamente: tratamento da informação, trigonometria, geometria analítica, análise combinatória e probabilidade.

Procuramos, sempre que possível, contextualizar o conteúdo e evitar as aulas expositivas tradicionais, seguidas de exercícios repetitivos. Para isso, buscamos utilizar metodologias diferentes, dentre elas destacam-se: Resolução de problemas, História da Matemática, Investigação Matemática e uso das tecnologias, com uso do GeoGebra e de jogos.

Esta pasta não envolve apenas os planejamentos e expectativas para cada encontro, mas também o relato detalhado de cada aula, nos quais buscamos destacar a reação dos alunos no desenrolar das atividades. Esperamos que esta experiência contribua com nossa formação e possa servir de exemplo para experiências futuras.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A presente unidade didática objetivou fazer – do ponto de vista metodológico – uma modificação na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas, segundo as etapas propostas por Onuchic e Allevato (2011). Lançando mão de ferramentas tecnológicas, em especial nas representações e manipulações geométricas e algébricas, bem como em pesquisas bibliográficas, montamos um conjunto de situações-problemas provenientes em geral do Enem – Exame Nacional do Ensino Médio – e aplicamos as mesmas seguindo as orientações da referida metodologia, com modificações que passaremos a explicitar mais adiante.

Tal empreitada se justifica, entre outros motivos, pela reflexão contínua dos autores dessa unidade didática, sobre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas e sobre a tese de que representações geométricas em aulas de matemática, devem ser feitas utilizando-se de softwares específicos, com ênfase no GeoGebra. O primeiro dos motivos acima consiste no fato de que utilizamos a metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2011), no estágio supervisionado I, e sendo assim fizemos uma longa reflexão sobre a aplicação das etapas propostas bem como suas respectivas potencialidades e limitações. O segundo motivo é relativo a reflexão feita na primeira etapa do estágio supervisionado II, juntamente com o professor orientador Rafael Tavares Juliani, sobre o fato de que representações geométricas devem ser feitas com software, já que as possibilidades dinâmicas e interativas são muito maiores e as possibilidades de erro, como um desenho ruim ou uma representação malfeita, são muito menores.

Podemos definir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas pelas seguintes etapas, como proposta por Onuchic e Allevato (2011):

A preparação do problema - Seleccionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. [...].  
A leitura individual - entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura. A leitura em conjunto - formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. [...] A resolução do problema – a partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula; Observar e incentivar – [...] o professor [...] analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo.



Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. [...]; O registro das resoluções na lousa [...]; Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. [...]; Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. [...]; Formalização do conteúdo – Neste momento denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.85).

Com relação a preparação do problema, optamos por utilizar basicamente problemas propostos nas provas do Enem – Exame Nacional do Ensino Médio – motivados pelo interesse dos alunos do PROMAT em prestar tal prova, que é uma porta de entrada para universidade. Sendo assim, nos afastamos da proposta original dada pelas autoras supracitadas, já que não utilizamos apenas problemas geradores, mas também situações-problema, o que é característico das provas do Inep (MARINHO; SANTOS e BARROS, 2018). O que mantivemos, nessa etapa, foi a ideia de que cada problema tinha como pano de fundo a construção de determinado conceito.

No que tange a fase de leitura individual e leitura em conjunto, a modificação mais significativa consistiu em não dividirmos a sala em grupo e, sendo assim, os alunos atuaram individualmente; fato que permeou todas as etapas da metodologia em questão. O principal motivo dessa postura se deu pela proporção entre a quantidade de estagiários e alunos, que era alta. Ou seja, havia em média um professor para cada cinco alunos, o que facilitava a circulação entre as carteiras visando a troca de ideias com os alunos, o que é característico dessa metodologia em que o professor assume postura de mediador. Obviamente que era possível que os alunos conversassem entre si para a resolução do problema, fato que ficou mais comum depois de algumas aulas, já que os alunos foram se conhecendo melhor. Outro motivo importante, para a não divisão em grupos, consiste em acreditarmos que o trabalho em grupo, apesar de ser bastante produtivo em muitos casos, cadencia um pouco o ritmo das atividades, o que objetivamos evitar tendo em vista a quantidade de conteúdos a serem ministrados e o interesse em fazer uma avaliação mais individualizada. Cabe ressaltar que a leitura de cada problema foi feita pelo estagiário responsável, destacando questões relevantes como

recorrência, estratégias de resolução, pontos chave do enunciado como condicionantes e possíveis pegadinhas.

Nas etapas de resolução do problema e observar e incentivar, mantivemos a ideia dada pelas autoras de que o professor deve apenas mediar e provocar o raciocínio do aluno. Tendo isso em vista, essa etapa consistiu na circulação dos estagiários entre os alunos visando questionar e ouvir as estratégias dos mesmos perante ao problema, sugerindo releituras e a observância das condicionantes. A etapa que consiste na plenária foi substancialmente modificada, pois os alunos não foram convidados a registrarem suas resoluções na lousa, já que em muitos casos na etapa anterior os estagiários puderam verificar que as resoluções dos alunos estavam boas. Assim os estagiários elegiam uma resolução bem recorrente e formalizavam-na para a classe, destacando conceitos, fazendo definições e enunciados característicos dos conteúdos que visávamos trabalhar em cada aula.

Podemos dizer então que as modificações feitas nas etapas da pretensa metodologia, consistem essencialmente no fato de que as atividades não se deram em grupos, mas de maneira mais individualizada e que a participação dos alunos se deu diretamente com os estagiários. Podemos destacar também, o fato de que houve uma tendência a uma abordagem mais tradicional no sentido de aplicação de problemas e exemplos, seguido de conceitos, o que pode ser notado também na utilização de problemas e situações-problema propostos nas provas do Enem, uma vez que utilizar provas de exames nacionais é uma característica de cursinhos pré-vestibulares.

Juntamente com a tentativa de modificações na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas, outra característica importante dessa unidade didática foi a utilização de ferramentas tecnológicas para representações geométricas e algébricas, bem como para pesquisas bibliográficas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais preconizam o uso das TIC – tecnologias da informação e comunicação, pois entre outros motivos

- Relativizam a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
- Evidenciam para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
- Possibilitam o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- Permitem que os alunos construam uma visão mais completa da

verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (BRASIL, 1998, p. 43-44)

É possível observar também que o uso de tecnologias tem o potencial de atrair os alunos, devido a sua disseminação no cotidiano das pessoas, que é nos dias de hoje, impensável sem celulares, computadores e internet. Isso é ainda mais acentuado na população jovem – que em geral compõe o conjunto de indivíduos para os quais os esforços de ensino são mais concentrados – já que nascem numa era preconizada pela era da informação. Podemos destacar também que já em 1998 os parâmetros curriculares nacionais já destacavam que é:

... esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (BRASIL, 1998, p. 46)

Devemos destacar que a utilização de um computador, multimídia ou qualquer outro recurso tecnológico não promoverá por si só a absorção e formação do conhecimento, sendo necessário, portanto um amplo processo de mediação nas atividades propostas. Em outras palavras:

[...] a introdução do computador na sala de aula, por si só, não constitui nenhuma mudança significativa para o ensino. O salto qualitativo no ensino da Matemática poderá ser dado através do aproveitamento da oportunidade da introdução do computador na escola, o que certamente favorecerá mudanças na pedagogia e poderá resultar em melhora significativa da educação. Para tanto, talvez seja mais realista pensar no aproveitamento de técnicas tradicionais para ir, aos poucos, introduzindo inovações pedagógicas e didáticas. (Cotta 2002, p. 20 e 21).

Tendo isso em vista,

as tecnologias devem ser usadas não porque é apenas mais uma tecnologia na sala de aula, mas porque elas são novas linguagens. Devem ser tratadas como novas linguagens a serem desenvolvidas pela escola porque estão presentes na vida dos alunos. O computador trouxe outra forma de texto chamada de hipertexto, outra forma diferente de leitura que favorece o processo de aprendizagem e a formação de leitores e de escritores. Desse modo, é necessário desenvolver as habilidades de leitura, de compreensão, e de interpretação desse tipo de texto. O papel das tecnologias digitais na sala de aula não é somente para tornar-se mais interessante, nem para facilitar o trabalho do professor, mas, sobretudo, porque são novas linguagens que o aluno precisa aprender a ler, a compreender, a interpretar. Estas mudanças apontam que a tarefa do educador, não é mais de memorizar, é a de problematizar aos educandos o conteúdo

que os mediatiza, e não a de dissertar sobre ele, de dá-lo, de estendê-lo, de entregá-lo, como se se tratasse de algo já feito, elaborado, acabado, terminado. (Pereira e Chagas, 2016)

Sendo assim, as aulas dessa unidade didática foram marcadas pela utilização de representações geométricas dinâmicas, provenientes especialmente do site <https://www.geogebra.org/materials?lang=pt>, que oferece uma centena de materiais interativos baseados no GeoGebra, como ciclos trigonométricos, representações geométricas como planificações e cálculo de medidas, entre outros. Tal convicção se deu nas discussões sobre a utilização de ferramentas tecnológicas, as quais nos levaram a concluir que representações geométricas em exposição de conteúdos matemáticos devem ser feitas através de softwares, pois a clareza e a dinâmica propiciadas pelos mesmos não são possíveis apenas com recursos tradicionais como quadro negro, régua e giz. Observou-se também que a utilização de computadores incentiva os alunos a se interessarem pelo tema proposto. Mais especificamente percebemos isso, a aplicação do módulo de trigonometria, presente nessa unidade didática, que se caracterizou principalmente por roteiros de construção de objetos trigonométricos e bem como a investigação dos mesmos, utilizando para isto o software GeoGebra. Como exemplo, podemos citar a construção do ciclo trigonométrico, estudo de seus elementos utilizando a dinâmica e a interatividade do software no que culmina com a utilização do controle deslizante para “girar” o ciclo, formando em outra janela os pontos do gráfico das funções trigonométricas, como pode ser observado em <https://www.geogebra.org/m/KDtqpbhA>.

Tais potencialidades do uso de softwares permearam toda essa unidade didática. Em geral, todas as aulas aqui presentes utilizaram-se de exposições geométricas e algébricas via softwares, com ênfase no GeoGebra. Desenhos, representações, visualizações geométricas de soluções algébricas e conteúdos envolvendo geometria sempre foram abordados utilizando o software referido, tendo em vista os argumentos já citados. Vale dizer ainda que, juntamente com tal abordagem, sempre que possível, era solicitado aos alunos para que os mesmos fizessem as representações das situações propostas nos problemas, antes mesmo de iniciar a resolução, visando interiorizar os elementos necessários para a resolução. A postura de fazer representações de objetos matemáticos tem uma grande importância na resolução de problemas tanto na matemática pura quanto na matemática aplicada e, por isso pode ser uma boa atitude no enfrentamento de problemas matemáticos a nível de ensino básico.

### **3. PROMAT**

#### **3.1 Plano de aula - 04/08/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Geometria analítica, plano cartesiano.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos aprendam a interpretar dados apresentados de diferentes formas.

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com tratamento da informação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Realizar solução das questões das provas do Enem, envolvendo leitura, interpretação de tabelas e gráficos;
- Construir assim a ideia de média aritmética, média ponderada, mediana e moda.

**Recursos Didáticos:** Quadro, giz, data show e material do aluno.

##### **3.1.1 Encaminhamento Metodológico**

No primeiro momento, por ser a primeira aula do PROMAT, será realizada a apresentação dos professores e os objetivos do projeto. Logo a seguir se dará início à aula, com explanação do assunto trabalhado e apresentação de slides, salientando diversos tipos de gráficos e tabelas nas questões do (ENEM).

Observação: os estagiários devem abordar cada problema fazendo a leitura em voz alta para iniciar a resolução. Os problemas serão resolvidos individualmente e no momento em que os alunos estiverem resolvendo, os estagiários devem circular entre os alunos, assumindo uma postura orientadora e questionadora sem explicitar a resposta. Após este período, o mesmo deve fazer a resolução no quadro do problema em questão.

**Problema 1:** (ENEM-2014) O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

<b>Taxa de doação de sangue, por região, em 2010</b>			
<b>Região</b>	<b>Doadores</b>	<b>Número de habitantes</b>	<b>Doadores/habitantes</b>
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
<b>Total</b>	<b>3 627 529</b>	<b>190 755 799</b>	<b>1,9%</b>

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são?

- a) Norte, Centro-Oeste e Sul.
- b) Norte, Nordeste e Sudeste.
- c) Nordeste, Norte e Sul.
- d) Nordeste, Sudeste e Sul.
- e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

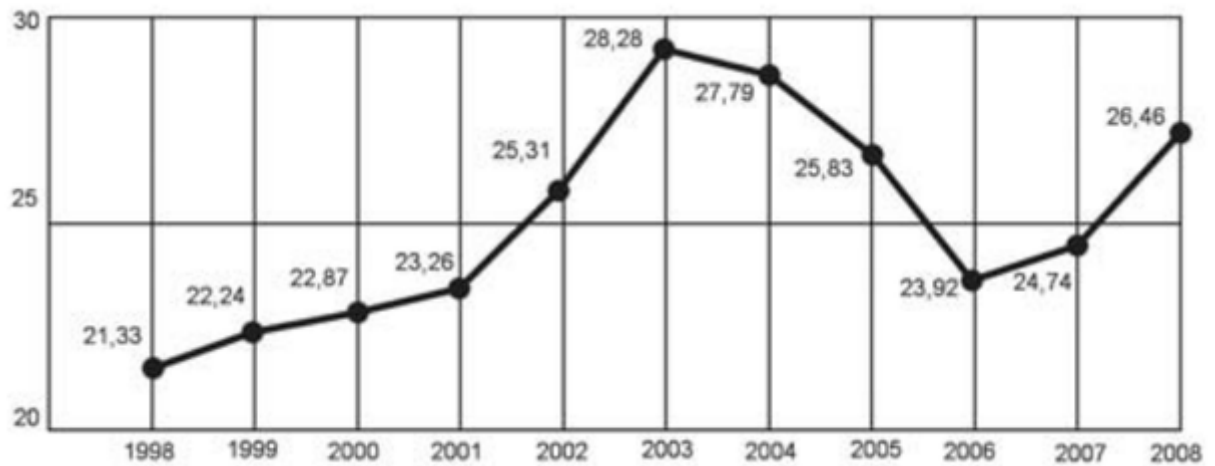
*Solução:* a) Analisando a tabela percebemos que o total é igual a 1,9%, então logo os valores tem que ser menores ou iguais. Sendo assim Nordeste 1,5%, Norte 1,5% e Sudeste 1,9%.

b) Norte, Nordeste e Sudeste.

**Problema 2:** (ENEM-2014) De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

- 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
- 33% são utilizados em descarga de banheiro.





Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais. Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de?

- a) 1998 e 2001.
- b) 2001 e 2003.
- c) 2003 e 2006.
- d) 2003 e 2007.
- e) 2003 e 2008.

*Solução:* Para que fique evidenciada a queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro em um ano com relação ao ano seguinte é preciso que o valor do ponto avaliado seja maior que o ponto posterior. Este fato se dá entre os anos de 2003 e 2006.

Pois  $28,28 (2003) > 27,29 (2004) > 25,83 (2005) > 23,92 (2006)$ . Esta relação não está presente em nenhum outro ponto do gráfico.

**Letra:** c) 2003 e 2006.

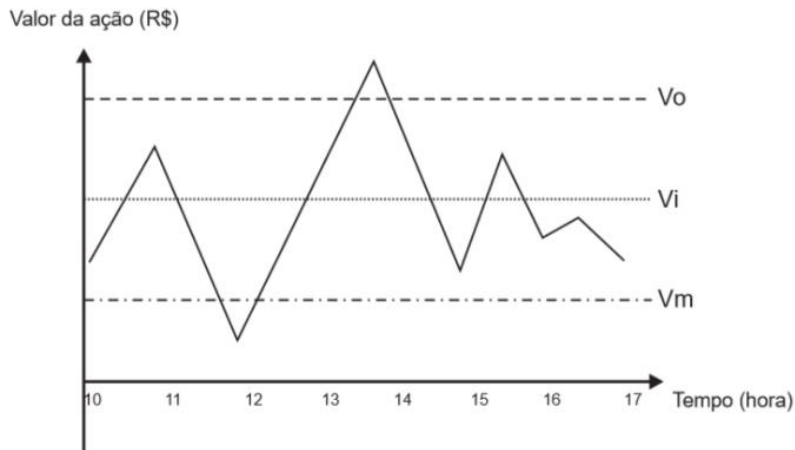
**Problema 4:** (ENEM-2015) Um investidor inicia um dia com  $x$  ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações.

Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

- I.** Vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal ( $V_i$ );
- II.** Compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo ( $V_m$ );
- III.** Vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo ( $V_o$ ).

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.





Quantas operações o investidor fez naquele dia?

- a) 3                      b) 4                      c) 5                      d) 6                      e) 7

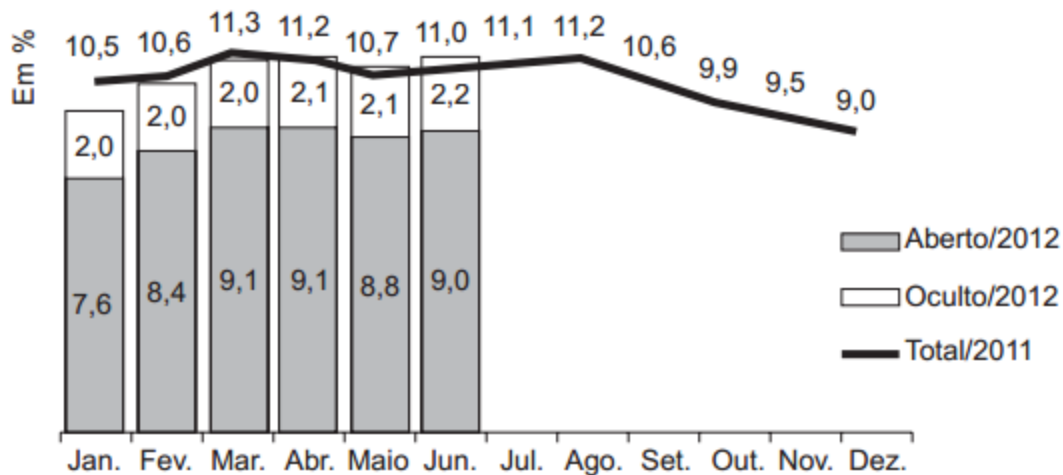
*Solução:* Observe que a figura possui 7 vértices. No primeiro vértice é realizada uma operação, pois o valor das ações passa do valor ideal. No segundo vértice também temos uma operação pois o valor das ações cai abaixo do valor mínimo. No terceiro vértice também é feita uma operação, pois o valor das ações passa do valor ótimo. Já no quarto vértice não há operação, pois apesar do valor das ações ter caído, não caiu abaixo do valor mínimo. No quinto vértice temos uma operação, pois o valor das ações ultrapassa o valor ideal. No sexto e sétimo vértice não há operações, pois o valor das ações não ultrapassa o valor ideal, e não caem abaixo do valor mínimo, respectivamente.

**Letra: b)** 4 operações.

**Conceito: Gráficos de linhas:** os gráficos de linhas (ou gráficos de segmentos) são utilizados, em geral, para representar a variação contínua de um fenômeno no decorrer do tempo.

Esse tipo de gráfico facilita suposições em relação a tendências do fenômeno pesquisado em períodos de tempo posteriores ao apresentado.

**Problema 5:** (ENEM-2014) O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto. Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.



Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de?

- a) 1,1
- b) 3,5
- c) 4,5
- d) 6,8
- e) 7,9

*Solução:* O enunciado nos diz que:  $ocultoemdezembre2012 = \frac{junhode2012}{2} = \frac{2,2}{2} = 1,1$

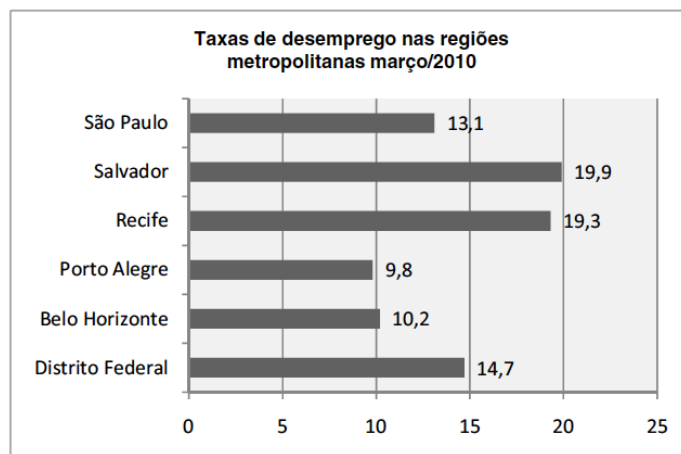
Total em dezembro de 2012 = dezembro de 2011 = 9

Já sabemos que:  $total = oculto + aberto$

Substituindo:  $9 = 1,1 + aberto \Rightarrow aberto = 9 - 1,1 \Rightarrow aberto = 7,9$

**Letra: e)** 7,9.

**Problema 6:** (ENEM-2010) Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de?

- a) 24500.    b) 25000.    c) 220500.  
d) 223000.                                        e) 227500.

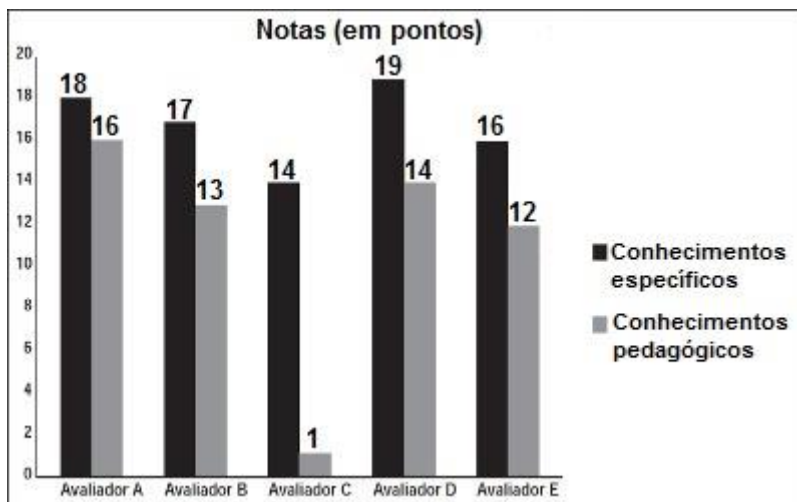
*Solução:* Porto Alegre: 9,8%

9,8% de 250000 pessoas,

$$\frac{9,8}{100} \times 250000 = 100 \times \frac{9,8}{100} \times 250000 \times \frac{1}{100} = \frac{980}{100} \times \frac{250000}{100} = 9,8 \times 25 = 24500 \text{ pessoas}$$

**Letra:** a) 24.500 pessoas.

**Problema 7:** (ENEM-2013) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



1ª questão com média aritmética – Enem 2013

Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é?

- a) 0,25 ponto maior.    b) 1,00 ponto maior.    c) 1,00 ponto menor.    d) 1,25 ponto maior.  
e) 2,00 pontos menor.

*Solução:* Primeiramente vamos realizar o cálculo da média aritmética de todas as **10** notas recebidas pelo professor:

$$MA = \frac{18 + 16 + 17 + 13 + 14 + 1 + 19 + 14 + 16 + 12}{10}$$

$$MA = \frac{140}{10}$$

$$MA = 14$$

Se descartarmos a maior e a menor nota, retiraremos as notas de valor **19** e **1**. Portanto, o cálculo da média aritmética agora será dado por **8** notas:

$$MA = \frac{18 + 16 + 17 + 13 + 14 + 14 + 16 + 12}{8}$$

$$MA = \frac{120}{8}$$

$$MA = 15$$

Podemos então concluir que, retirando as notas mais extremas, a média passou de **14** para **15 pontos**, ficando **1,00 ponto maior**. Logo, a alternativa correta é a

**Letra: b)** 1,00 ponto maior.

**Conceito: Gráficos de barras (ou de colunas)** representam os dados pesquisados por meio de retângulos que podem estar dispostos na vertical (gráficos de barras verticais) ou na horizontal (gráfico de barras horizontais).

- No gráfico de barras verticais, os retângulos têm larguras (medida horizontal) iguais e alturas (medida vertical) proporcionais aos valores representados.
- No gráfico de barras horizontais, os retângulos têm alturas iguais e as larguras é que variam.
- Nos gráficos de barras múltiplas, pode-se representar mais de um fenômeno no mesmo gráfico de barras vertical ou horizontais, facilitando a comparação e a verificação de relação entre eles.

Outro conceito abordado nessa questão é o da **média aritmética** ou **simplesmente média** é a medida de tendência central mais utilizada para apresentar um conjunto de dados. Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, adicionamos esses números e dividimos o resultado obtido pela quantidade de números adicionados.

A média aritmética ( $\bar{X}$ ) de um conjunto de  $n$  valores ( $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n$ ), é dada por:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

**Problema 8:** (ENEM-2017) A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas ( $M$ )
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte. Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

a)7,00                      b)7,38                      c)7,50                      d)8,25                      e)9,00

*Solução:*

Vamos calcular o valor da nota necessária para obter avaliação "Bom" (média maior ou igual a 7).

$$\frac{x \cdot 12 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 7,5 \cdot 10}{12 + 4 + 8 + 8 + 10} = 7 \Rightarrow \frac{12x + 32 + 48 + 40 + 75}{42} = 7$$

$$12x + 32 + 48 + 40 + 75 = 294 \Rightarrow 12x + 195 = 294 \Rightarrow 12x = 294 - 195$$

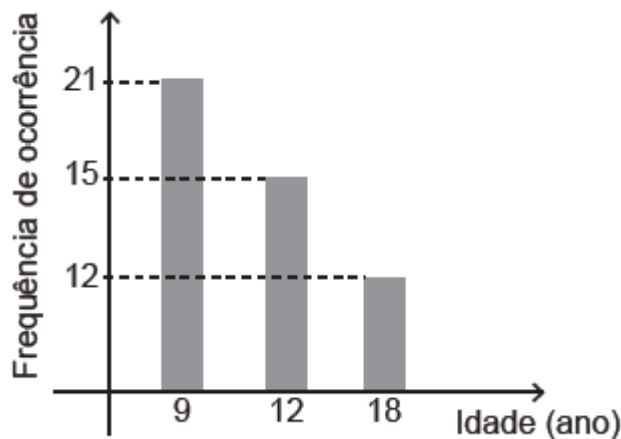
$$\Rightarrow x = \frac{99}{12} = 8,25$$

**Letra: d) 8,25**

**Conceito:** No cálculo da **média aritmética** visto anteriormente, supomos que cada valor do conjunto de dados tenha a **mesma “importância”**. Contudo, há situações nas quais essa suposição não é verdadeira, ou seja, há valores com **“importância” diferentes**. Como na questão acima. Portanto a **média aritmética ponderada** ( $\hat{X}_p$ ) de um conjunto de  $n$  valores ( $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n$ , cujos pesos são respectivamente ( $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_{n-1}, p_n$ ), é dada por:

$$\hat{X}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + \dots + x_{n-1} \cdot p_{n-1} + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots + p_{n-1} + p_n}$$

**Problema 9:** (ENEM-2015) Uma pessoa, ao fazer uma pesquisa com alguns alunos de um curso, coletou as idades dos entrevistados e organizou esses dados em um gráfico.



Qual a moda das idades, em anos, dos entrevistados?

- a) 9
- b) 12
- c) 13
- d) 15
- e) 21

**Solução:** Precisamos encontrar a **moda**, que é uma medida de frequência que é caracterizada pelo termo que aparece mais vezes em nossa frequência.

Logo temos que:

O número 9 aparece 21 vezes.

O número 12 aparece 15 vezes.

O número 18 aparece 12 vezes.

Logo o que apresenta mais frequência é o 9.

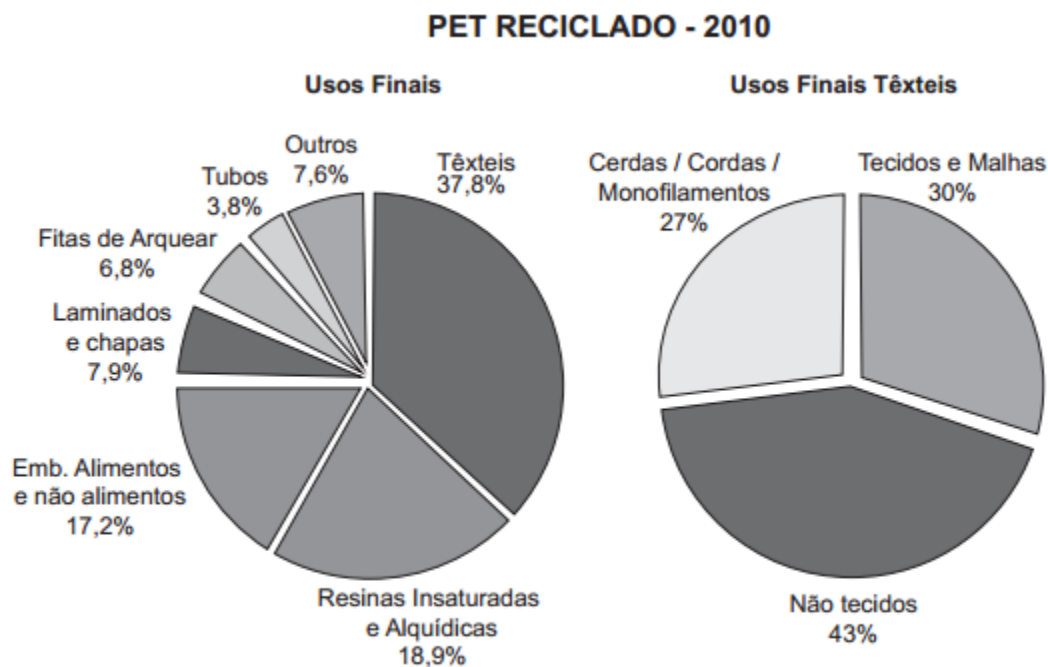
**Letra: a) 9**

**Conceito: Moda** em estatística é uma medida de tendência central correspondente aos valores de maior frequência em um conjunto de dados.

**Exemplo:** quando dizemos que algo está na **moda**, como uma peça de vestuário, estamos nos referindo a um modelo de roupa que está sendo aceito e usado por muitas pessoas.

**Observação:** há conjuntos de dados que **não possuem moda**, denominados **amodais**. Contudo, existem também aqueles que possuem **mais de uma moda**. Denominados **bimodais** aqueles que possuem duas modas, **trimodais** os que possuem três modas, e assim por diante.

**Problema 10:** (Enem-2015) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, Fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (Kilotoneladas). De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de?



Disponível em: [www.abipet.org.br](http://www.abipet.org.br). Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

a) 16,0

c) 32,0

e) 106,6

b) 22,9

d) 84,6

*Solução:* Das 282 kton recicladas, 37,8% foram destinados à indústria têxtil, isto é, um total de  $37,8\%$  de  $282 = \frac{37,8}{100} \times 282 = 106,6 \text{ kton}$ .

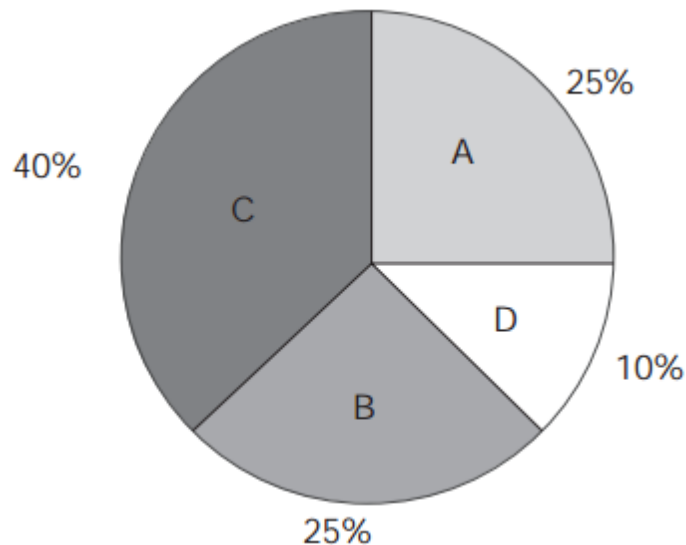
Deste novo total, 106,6 kton, 30% acabaram sendo para a confecção de tecidos e malhas, ou seja,  $30\%$  de  $106,6 = \frac{30}{100} \times 106,6 = 31,98 \text{ kton}$ .

**Letra: c)** 31,98 KTON.

**Problema 11:** (Enem-2013) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram:

A = R\$ 200,00; B = R\$ 300,00; C = R\$ 400,00 e D = R\$ 600,00.

No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária:



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é?

a) 300,00

c) 350,00

e) 400,00

b) 345,00

d) 375,00

*Solução:* A **mediana** de um conjunto de valores é o valor do termo central do **rol** de valores. No caso, são 200 hotéis, sendo assim o termo central, ou seja, terá que ser calculada a **média** dos valores da diária do, 100 e 101 valor do **rol** (valores colocados em ordem crescente ou decrescente). Através do gráfico de setores apresentado percebe-se que o 100 o valor é 300



reais, e que o valor de 101 é de 400 reais, pois 25% do menor valor (A) somado com 25% do valor seguinte (B) totalizam os 50% correspondente á metade dos valores. Sendo assim, a mediana é  $\frac{300+400}{2} = 350$ reais.

**Letra: C)** 350,00 reais.

**Conceito: Gráficos de setores:** os gráficos de setores (ou pizza, também chamado assim), em geral são utilizados para comparar as partes de um conjunto de dados com o todo. Para isso, costuma-se utilizar a porcentagem correspondente a cada uma dessas partes. Esse gráfico consiste em um círculo dividido em tantas partes quantas forem ás divisões dos dados, e cada setor obtido é proporcional à parte por ele representada. E também é possível obter o ângulo central correspondente a cada setor do gráfico por meio de regra de três.

Outro conceito abordado nesta questão é o de **Mediana**, cuja principal característica é dividir o conjunto de dados em duas partes: podemos assim considerar dois casos para obtenção da mediana:

- **1º caso:** Conjunto de dados com quantidade **ímpar** de valores. Nesse caso, inicialmente dispomos esses valores em **rol** (é a ordenação do conjunto de dados em ordem crescente ou decrescente). A **mediana** irá corresponder ao termo central do **rol**.
- **2º caso:** conjunto de dados com quantidade **par** de valores. Com os valores dispostos em **rol**, obtemos a **mediana** calculando a **média aritmética** entre os dois termos **centrais do rol**.

### 3.1.2 Referências

Souza, Joamir Roberto de Novo olhar matemática / Joamir Roberto de Souza. – 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2010. –(Coleção Novo Olhar; v.2)

Disponível em: <http://bvsmms.saude.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). Almanaque abril 2010. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado). (Foto: Reprodução/Enem).

Disponível em: [www.dieese.org.br](http://www.dieese.org.br). Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento).

Disponível em: <http://g1>. Globo. Com. Acesso em: 28 abr.2010 (adaptado).

Disponível em: [www.abipet.org.br](http://www.abipet.org.br). Acesso em: 12 jul.2012 (adaptado).

Fonte: Caderno de Questões. Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM 2014. 2º dia/ Caderno 7 – AZUL – Questão nº 140, p. 20.

Disponível

em:<[http://educando.sanepar.com.br/ensino\\_fundamental/declara%C3%A7%C3%A3ouniversa-dos-direitos-da-%C3%A1gua](http://educando.sanepar.com.br/ensino_fundamental/declara%C3%A7%C3%A3ouniversa-dos-direitos-da-%C3%A1gua)>. Acesso em: 08 set. 2014, 16:40.

Nova Escola, São Paulo. dez 2010 (adaptado).

### **3.1.3 Relatório**

No dia 04 de agosto de 2018, realizamos o primeiro encontro de aula da nossa regência no PROMAT. Inicialmente nos apresentamos aos alunos, explicando como a regência seria desenvolvida e em seguida cada aluno se apresentou, falando sobre os planos para o futuro. Durante essa apresentação, pudemos perceber o interesse predominante nos alunos em relação aos estudos. Todos os alunos pensam na possibilidade de ingressar no ensino superior.

Após as apresentações, iniciamos o conteúdo explicando aos alunos o que é estatística, destacando a análise de gráficos e tabelas para resolver problemas, como questões sociais e econômicas apresentadas na mídia (jornais, revistas, internet, tv, entre outros) propicia aos alunos a tomada de decisões, desenvolvendo seu senso crítico, diante de relatos apresentados em situações diversas. A intervenção metodológica foi realizada com a aplicação das atividades de ensino com objetivo de promover a leitura e interpretação das informações numéricas contidas em tabelas e gráficos. Para atingir o objetivo desta aula foi elaborada, uma sequência didática com o uso Datashow e materiais impressos, com intuito de contribuir com a leitura e interpretação de dados apresentados em tabelas e gráficos, bem como a organização dos mesmos. No primeiro momento foi apresentado slide com tema “Tratamento de informação”, nesta apresentação foi mostrado como é feita a leitura e a organização das mais variadas tabelas e gráficos. No segundo momento, foram aplicadas atividades impressas. As atividades eram feitas de forma individual, neste momento era realizada uma análise para vermos onde os alunos apresentavam maior dificuldade com relação ao tema “Tratamento de Informação”.

No início das atividades, percebemos que a maioria dos alunos apresentaram dificuldade principalmente na leitura das informações, Com isto, o foco centrou-se na leitura, para transpor esta dificuldade apresentada, mas no decorrer da aula, observamos que a cada atividade aplicada eles foram compreendendo gradativamente e no final o resultado surpreendeu até os professores que acompanhamos as etapas e o progresso dos alunos em relação ao conteúdo aplicado. Vemos que os alunos já estão ansiosos para as próximas aulas, pois éramos em quatro docentes em sala

de aula, efetivando assim a interação nossa de professores com os alunos e do ensino e aprendizagem ter de fato ocorrido.

### **3.2 Plano de aula - 11/08/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Trigonometria, Relações trigonométricas.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos aprendam as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Construir as principais relações trigonométricas salientando sua aplicação em questões do Enem;

**Recursos Didáticos:** GeoGebra, quadro, giz, data show e material do aluno.

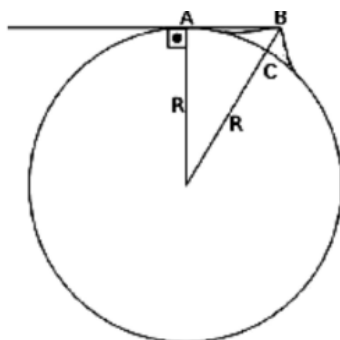
#### **3.2.1 Encaminhamento Metodológico**

Observação: os estagiários devem abordar cada problema fazendo a leitura em voz alta para iniciar a resolução. Os problemas serão resolvidos individualmente, e no momento em que os alunos estiverem resolvendo, os estagiários devem circular entre eles assumindo uma postura orientadora e questionadora sem explicitar a resposta. Após este período, o mesmo deve fazer a resolução no quadro do problema em questão.

1º Apresentaremos o conceito de razão trigonométrica via resolução de problemas.

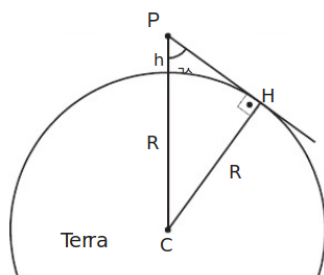
**Problema 1:** A figura abaixo ilustra a maneira como Galileu calculou a altura (BC) de uma montanha da Lua. Ele obteve a distância AB a partir de observações que fez com a luneta e

conhecia o raio da Lua. Adotando AB como 44,73 km e o raio da Lua 1.000 km (apenas para simplificar as contas), calcule a altura da montanha lunar (BC) da figura.



Resolução: Pelo teorema de Pitágoras encontramos a medida da hipotenusa. Subtraindo a medida do raio da medida da hipotenusa temos a altura da montanha.

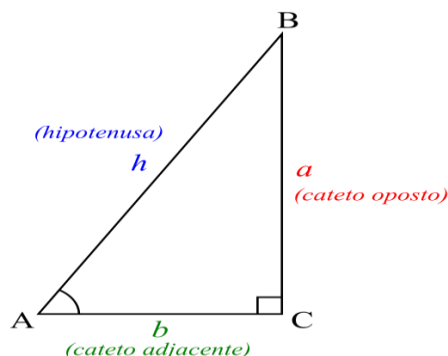
**Problema 2:** Na figura abaixo, o ponto C é o centro da Terra e o ponto P é uma pessoa que está situada no pico do monte Everest a uma altura  $h = 8,848$  quilômetros em relação ao nível do mar. Para essa pessoa, o ponto H está na linha do horizonte e o ângulo no ponto H é reto. Se o ângulo no ponto P é aproximadamente  $87^\circ$  qual é a medida do raio da terra.



1º) Inicialmente relembremos as relações trigonométricas do triângulo retângulo utilizando os links <https://www.geogebra.org/m/MMe43fQT> e <https://www.geogebra.org/m/G4zfMHEF>.

**Conceito:** Em um triângulo retângulo escolhemos um dos seus ângulos agudos e definimos como cateto oposto CO o lado que está na sua “frente”, cateto adjacente CA o lado que está no seu lado. A hipotenusa é o segmento que está na “frente” do ângulo reto (tal conceito não deve

ser escrito no quadro mas sim formalizado fazendo o seguinte desenho).



Para exemplificar o conceito utilizaremos alguns exemplos dados pelos links acima.

**Conceito:** O seno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é uma razão entre as medidas do cateto oposto pela hipotenusa. Ou seja,  $\text{sen}\alpha = \frac{CO}{H}$ .

**Exemplo:** Exemplificar com o link <https://www.geogebra.org/m/MMe43fQT> (abrir no aplicativo online) mostrando que para quaisquer medidas de hipotenusa e cateto oposto, para um ângulo fixo levam a mesma medida do seno. Ou seja, o seno é uma medida que varia apenas com a medida do ângulo e não com as medidas do cateto oposto e hipotenusa. Ou seja, para cada ângulo entre 0 e 90° temos um valor de seno associado.

**Solução:** Com o valor do seno para o ângulo de 87°, temos  $0,9986 = \frac{R}{8,848+R}$  e encontramos o valor de  $R = 6444,82$  km.

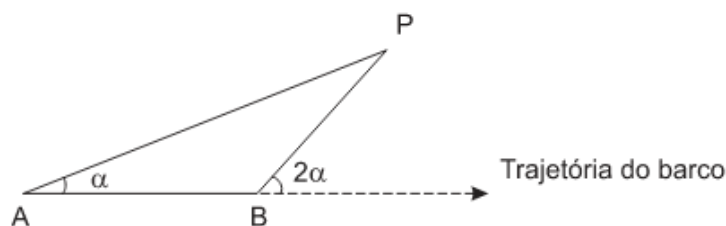
**Problema 3:** Agora utilizando as medidas encontradas no problema anterior calcule a distância entre os pontos P e H.

**Conceito:** O cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é uma razão entre as medidas do cateto adjacente pela hipotenusa. Ou seja,  $\text{cos}\alpha = \frac{CA}{H}$ .

**Exemplo:** Exemplificar com o link <https://www.geogebra.org/m/MMe43fQT> (abrir no aplicativo online) mostrando que para quaisquer medidas de hipotenusa e cateto adjacente, para um ângulo fixo levam a mesma medida do cosseno. Ou seja, o cosseno é uma medida que varia apenas com a medida do ângulo e não com as medidas do cateto oposto e hipotenusa. Ou seja, para cada ângulo entre 0 e 90° temos um valor de seno associado.

*Solução:* Com o valor do seno para o ângulo de  $87^\circ$ , temos  $0,56975003 = \frac{PH}{6453,6765}$  e encontramos o valor de PH.

**Problema 4:** (Enem 2011 – Questão 158) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual  $\alpha$  fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual  $2\alpha$ . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo  $\alpha = 30^\circ$  e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância  $AB = 2000\text{m}$ . Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será?

**Conceito:** A tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é uma razão entre as medidas do cateto oposto pelo cateto adjacente. Ou seja,  $\tan\alpha = \frac{CO}{CA}$ .

**Exemplo:** Exemplificar com o link <https://www.geogebra.org/m/MMe43fQT> (abrir no app online) mostrando que para quaisquer medidas do cateto oposto e cateto adjacente, para um ângulo fixo levam a mesma medida do tangente. Ou seja, a tangente é uma medida que varia apenas com a medida do ângulo e não com as medidas do cateto oposto e hipotenusa. Ou seja para cada ângulo entre  $0$  e  $90^\circ$  temos um valor de seno associado.

**Observação:** Podemos escrever  $\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$ .

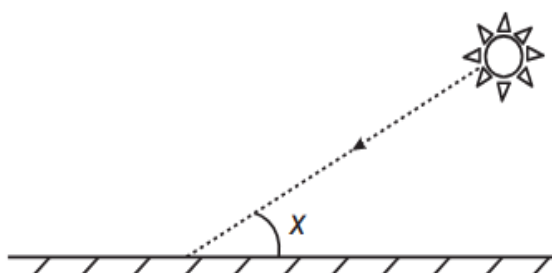
*Solução:* Projetando o ponto P na reta que a trajetória do barco temos um ponto P'. A distância entre P e P' representa a menor distância entre o ponto P e o barco em sua trajetória. Para este cálculo utilizamos a tangente. Note que  $\tan\alpha = \frac{PP'}{2000+BP'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{PP'}{2000+BP'}$  e  $\tan 2\alpha = \frac{PP'}{BP'} \Rightarrow$

$$\sqrt{3} = \frac{PP'}{BP'} \Rightarrow PP' = BP'\sqrt{3}, \text{ de onde } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BP'\sqrt{3}}{2000+BP'} \Rightarrow BP' = 1000 \text{ e } PP' = 1732,05\text{m}$$

**Observação:** É importante observar, portanto que cada ângulo tem uma medida de seno e cosseno. Não importa o tamanho das medidas do triângulo, tais valores só variam com a medida do ângulo associado. (Com o link <https://www.geogebra.org/m/MMe43fQT>) Alguns valores desses são especiais uma vez que são muito utilizados em avaliações

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

**Problema 5:** (Enem 2017 – Questão 147) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo  $x$  com a sua superfície conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por  $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$  sendo  $k$  uma constante, e supondo-se que  $x$  está entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

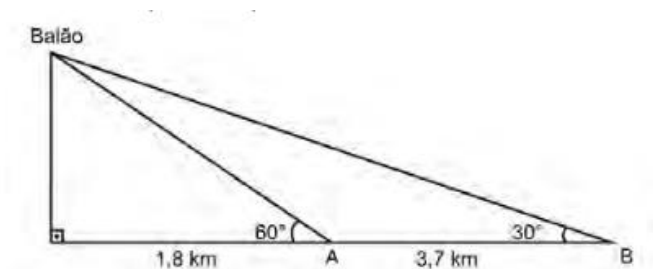


Quando  $x=30^\circ$ , a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

*Solução:* Notemos inicialmente que o valor do seno cresce tendendo a 1 a medida que o argumento se aproxima do ângulo de  $90^\circ$ . Isso pode ser observado na tabela e nas representações dadas em <https://www.geogebra.org/m/MMe43fQT> e <https://www.geogebra.org/m/G4zfMHEF>. Portanto podemos dizer que a incidência máxima é

dada por  $k$ . Como  $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$  a incidência para o ângulo que mede  $30^\circ$  é dada por  $\frac{1}{2}k$ . Então o percentual da intensidade luminosa é 50%.

**Problema 6:** (Enem – 2010 Questão 160) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de  $60^\circ$ ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de  $30^\circ$ .

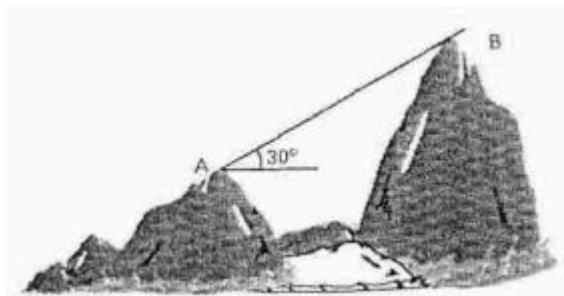
- Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?
- Obtenha as distâncias do observador A e do observador B ao balão (utilize as relações trigonométricas).

*Solução:* Estabelecemos as seguintes relações com a tangente.  $\tan 60^\circ = \frac{\text{sen}60^\circ}{\text{cos}60^\circ} = \frac{x}{1,8} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{1,8} \Rightarrow x = 3,11 \text{ km}$  de altura. A distância do observador A ao balão é dada por  $\text{cos}60^\circ = \frac{1,8}{H} \Rightarrow H = \frac{1,8 \cdot 2}{1} \Rightarrow H = 7,2 \text{ km}$ . A distância do observador B até o balão é obtida da mesma maneira utilizando o seno de  $30^\circ$ .

**Problema 7:** As alturas (em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são,



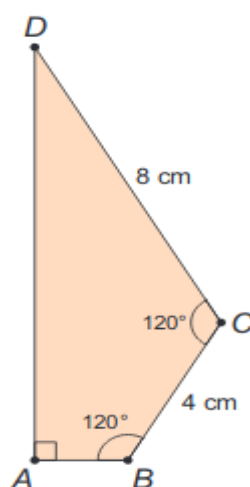
respectivamente 812 e 1020 metros. Do ponto A vê-se o ponto B sob um ângulo de  $30^\circ$  com o plano horizontal, conforme a figura. Determine a distância entre os pontos A e B.



*Solução:* Observe que a diferença entre as alturas correspondem ao cateto oposto ao ângulo em questão,  $30^\circ$  graus. Assim é possível utilizar a relação trigonométrica seno e calcular a distância desejada.

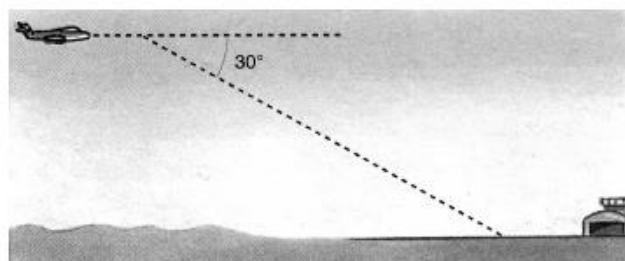
**Problema 8:** Um avião decola com uma inclinação de  $15^\circ$  em relação ao horizonte. Após percorrer 500m nesta direção, qual será a altura do avião em relação à pista? Faça um desenho para representar tal situação (Utilize  $\text{sen}15^\circ=0,26$ ;  $\text{cos}15^\circ=0,97$ ;  $\text{tg}15^\circ=3,73$ ).

**Problema 9:** (Obmep 2017 ) Na figura, os ângulos ABC e BCD medem  $120^\circ$ , o ângulo BAD é reto, e os segmentos BC e CD medem 4 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero ABCD em  $\text{cm}^2$ ?



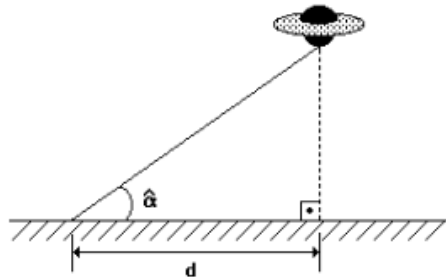
*Solução:* Uma estratégia interessante e útil em geometria no geral é esboçar uma representação. Podemos prolongar o desenho determinando um ponto B' colinear a A e B e um ponto D' colinear a B' e C. Assim determinamos um retângulo no qual esta inscrito nosso quadrilátero. Com a relação do seno calculamos a medida do segmento B'C, ou seja,  $\text{sen}60^\circ = \frac{B'C}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{B'C}{4} \Rightarrow B'C = 2\sqrt{3}\text{cm}$ . Com tais valores via teorema de Pitágoras calculamos o segmento BB';  $4^2 = (2\sqrt{3})^2 + (BB')^2 \Rightarrow BB' = 2\text{cm}$ . Com nossa representação temos que o ângulo DCD' é dado por  $30^\circ$ . Sendo assim calculamos o lado DD' por  $\text{sen}30^\circ = \frac{DD'}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DD'}{8} \Rightarrow DD' = 4\text{cm}$ . Portanto o segmento CD' tem a medida de  $8^2 = 4^2 + (CD')^2 \Rightarrow CD' = 6,92\text{cm}$ . Com tais medidas podemos calcular a área do retângulo que é dada por  $(2\sqrt{3} + 6,92)(4) = 41,53\text{cm}^2$ . Tiramos então dessa medida a área dos dois triângulos que obtivemos com a representação, a saber  $\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{3}\text{cm}^2 = 3,46\text{cm}^2$  e  $\frac{6,92 \cdot 4}{2} = 13,84\text{cm}^2$ . Logo a área que procuramos é  $24,23\text{cm}^2$ .

**Problema 10:** Um avião está voando paralelo ao solo. Ao avistar o aeroporto ele é inclinado  $30^\circ$  e percorre 6 km até tocar na pista de pouso. A que altura ele está voando?



*Solução:* Com a relação  $\text{sen}30 = \frac{\text{altura}}{6}$  temos a resposta.

**Problema 11:** Um disco voador é avistado, numa região plana, a uma certa altitude, parado no ar. Em certo instante, algo se desprende da nave e cai em queda livre, conforme mostra a figura. A que altitude se encontra esse disco voador?



Considere as afirmativas:

I - a distância  $d$  é conhecida;

II - a medida do ângulo  $\hat{\alpha}$  e a tangente do mesmo ângulo são conhecidas.

Responda se cada item abaixo é verdadeiro ou falso justificando-o.

a) a I sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a II, sozinha, não.

R: falso.

b) a II sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a I, sozinha, não.

R: falso.

c) I e II, juntas, são suficientes para responder à pergunta, mas nenhuma delas, sozinha, não é:

R: verdadeiro.

d) ambas são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta.

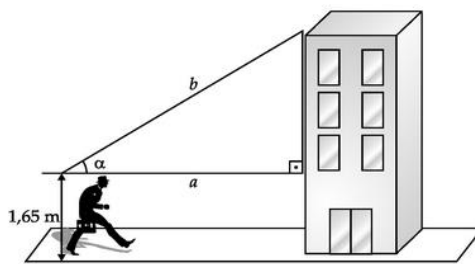
R: falso.

e) a pergunta não pode ser respondida por falta de dados.

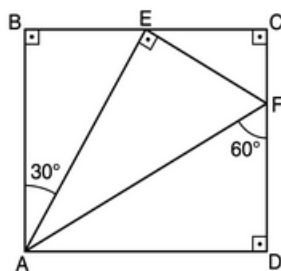
R: falso.

*Solução:* A altitude solicitada se encontra utilizando a relação trigonométrica tangente.

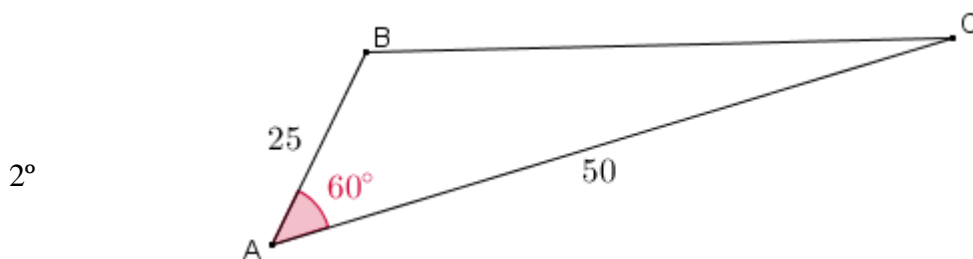
**Problema 12:** (Unicamp-SP) Uma pessoa de 1,65 m de altura observa o topo de um edifício conforme o esquema abaixo. Para sabermos a altura do prédio, devemos somar 1,65m a:



**Problema 13:** (CEFET-PR) Se na figura abaixo  $AB = 9$  cm, o segmento  $DF$  mede, em cm:



**Problema 14:** Qual é a distância entre os vértices  $B$  e  $C$  do triângulo abaixo?



Apresentaremos o ciclo trigonométrico. Iniciaremos com o link <https://www.geogebra.org/m/k35cssrm> salientando que as razões trigonométricas em que a hipotenusa é unitária descrevem a rota de uma circunferência, de onde definimos o ciclo trigonométrico. Ou seja, veremos que se colocarmos como coordenada de um ponto no plano, as razões trigonométricas de um triângulo retângulo, o qual possui hipotenusa é unitária, então este ponto deve pertencer a circunferência de raio 1 (mostrar link <https://www.geogebra.org/m/ujQcPXAn> ). Observamos também que como as razões trigonométricas não dependem das medidas dos lados do triângulo em questão, uma vez fixado um ângulo, e sendo assim o ciclo trigonométrico utiliza hipotenusa constante e para cada ângulo temos um único valor associado, lembrando a ideia de função. Tal representação mostra ainda que para a hipotenusa unitária os valores de seno e cosseno são os valores das medidas do cateto

oposto e do cateto adjacente, respectivamente. Logo podemos observar que no ciclo trigonométrico a medida dada no eixo vertical é o valor do seno, assim como a medida dada no eixo horizontal é o valor do cosseno, uma vez fixado um ângulo. Cabe destacar que o ciclo trigonométrico (mostrando representação <https://www.geogebra.org/m/KbFX3Urn> e <https://www.geogebra.org/m/ujQcPXAn>) está orientado no sentido anti-horário, ou seja, o ângulo cresce no sentido anti-horário e decresce no sentido horário. Também note que o mesmo está centrado em um sistema cartesiano ortogonal e que os valores para seno e cosseno podem assumir valores negativos.

### 3.2.2 Referências

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E AERONÁUTICA. Disponível em: <http://www.oba.org.br/site/?p=conteudo&idcat=9&pag=conteudo&m=s> Acesso em 11 jul 2018.

PROBLEMAS DO ENEM: <https://enem.estuda.com/questoes/?cat=3&subcat=361> Acesso em 11 jul 2018.

PROJETO MEDICINA:  
[https://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/391/matematica\\_trigonometria\\_relacoes\\_trigonometricas.pdf](https://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/391/matematica_trigonometria_relacoes_trigonometricas.pdf) Acesso em 11 jul 2018.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Inep. Disponível em: <[www.inep.gov.br](http://www.inep.gov.br)>. Acesso em: 04 ago. 2018.

### 3.2.3 Relatório – 11/08/2018

Neste dia, iniciamos o conteúdo de Trigonometria, um assunto que causa repulsa em muitos estudantes, exige concentração e dedicação, pois não é um conteúdo facilmente compreendido. Por outro lado, se torna interessante pelas suas aplicações cotidianas. Dessa forma, buscamos formas de motivar os estudantes ao estudo do conteúdo.

Como descrito no plano de aula, apresentando exemplificar vários exemplos no software GeoGebra, perguntamos se todos conheciam o GeoGebra e se já tinham trabalhado

com esse software, mas a maioria não o conhecia e muito menos tinha trabalhado com ele; apresentamos a eles como adquirir esse software e sua grande aplicabilidade nos entes matemáticos. Para isso, selecionamos a relevância e aplicabilidade da Trigonometria, informalmente, para mostrar aos estudantes a importância desse conhecimento.

Com isso, esperávamos que os estudantes não tivessem um conhecimento superficial, limitados aos procedimentos mecânicos, como a reprodução das fórmulas que foram previamente memorizadas. Cabe salientar que começamos o ensino na relação dos triângulos e aos poucos conceituando os primeiros conceitos da trigonometria e avançando no entendimento de seno, cosseno e tangente, facilitando, indiretamente, o ensino das demais funções trigonométricas que derivam dessas.

Durante a atuação, lamentamos o número reduzido de estudantes. Por outro lado, isso facilitou o envolvimento nosso na função de professores com cada um dos estudantes. Essa peculiaridade oportunizou sanar dúvidas nos conteúdos do ensino fundamental e médio, o que provavelmente não ocorreria em uma turma com mais educandos.

Enfim, o trabalho teve algumas limitações, mas trouxe resultados surpreendentes também. Os estudantes aprenderam com a prática para depois abstrair. Podemos repensar nossa ação como professores, não somente enquanto educador em processo de formação, mas enquanto ser humano, sendo assim fomos beneficiados por esse espaço de aprendizagens mútuas.

### **3.3 Plano de aula - 18/08/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Trigonometria, ciclo trigonométrico.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos aprendam as relações trigonométricas no ciclo trigonométrico.

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz

de:

- Construir o conceito de ciclo trigonométrico;

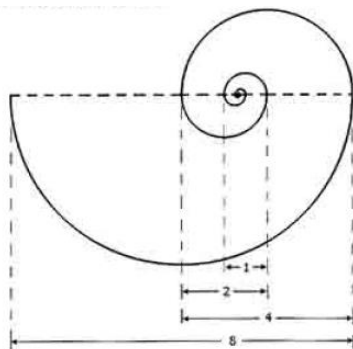
**Recursos Didáticos:** GeoGebra, material impresso do aluno, quadro negro e giz.

### 3.3.1 Encaminhamento Metodológico

1º Comprimento da circunferência: Com o link <https://geogebra.org/m/BGjcvbMV> relembremos o conceito de comprimento de uma circunferência de raio qualquer. Faremos alguns exemplos para mostrar que a fórmula dada por  $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ . Outra maneira de ver isto é o fato que a experiência mostra que  $\frac{C}{d} = \pi$  e sendo assim temos a referida fórmula para o comprimento. Ressaltaremos que desta forma encontramos o comprimento da circunferência onde a unidade de medida corresponde a unidade de medida do raio. Ou seja, se o raio estiver em centímetros, então tal comprimento estará em centímetros. Em seguida com o link <https://www.geogebra.org/m/fvn5hVZr> mostraremos que é possível calcular o comprimento de um arco qualquer. Assim como no caso da circunferência inteira podemos determinar o comprimento de um arco determinado por um ângulo de  $30^\circ$  com a seguinte regra de três:  $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{x} = \frac{360^\circ}{30^\circ} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} rad$ . Sendo assim temos uma nova medida para calcular o comprimento de um arco, o radiano que toma como unidade de medida o raio da circunferência em questão, ou seja se um arco tem 1 rad, quer dizer então que seu comprimento corresponde ao comprimento do raio. Isto pode ser visualizado em <https://www.geogebra.org/m/WZMuGabp>.

0 - (UFRGS) Considere que a espiral representada na figura abaixo é formada por oito semicírculos cujos centros são colineares. O primeiro semicírculo tem diâmetro 8 e, para cada um dos demais semicírculos, o diâmetro é a metade do diâmetro do semicírculo anterior.

Qual é o comprimento dessa espiral?







Resolução: Utilizar a fórmula do comprimento da circunferência relacionando-a com o ângulo raso.


2º) No laboratório de computação os alunos farão a construção do ciclo trigonométrico no GeoGebra. Haverá um roteiro para a construção e os estagiários deverão auxiliar à construção individualmente.



Roteiro – Construção do ciclo trigonométrico.



1 – Abra o GeoGebra. Clique em salvar como e salve o arquivo na área de trabalho, com o seu nome.


2 – Clique em  e selecione Mover Janela de Visualização. Clique no plano cartesiano e segure. Assim  arraste o mouse centralize o plano cartesiano. Clique de novo no mesmo item e selecione a lupa com o sinal + , a qual está escrito Ampliar. Em seguida clique no plano cartesiano  ampliando a visualização.

3- Clique em e  selecione Círculo dados Centro e Raio. Em seguida clique na origem do plano cartesiano. Aparecerá uma janela. Na mesma digite 1 e dê ok. Assim você construirá um círculo de raio 1, centrado no ponto A.

4- Clique em  e selecione Ponto. Clique em um ponto da circunferência. Assim você construirá um ponto B sob a circunferência.

5 – Clique em  e selecione Segmento. Clique no ponto A e posteriormente no ponto B. Assim você construirá um segmento entre os pontos A e B. Clique com o botão direito encima deste segmento  e desmarque a opção exibir rótulo.


6 – Clique em e  selecione Reta Perpendicular. Clique no ponto B e em seguida no eixo x. Assim você construirá uma reta perpendicular ao eixo x. Novamente clique no ponto B e em seguida  no eixo y. Assim você construirá uma reta perpendicular ao eixo y.

7 – Clique em e  selecione Intersecção de Dois Objetos. Clique no eixo x e na reta perpendicular ao mesmo. Assim você construirá um ponto C, na interseção entre a reta e o eixo x. Em seguida clique no eixo y e na reta perpendicular ao mesmo. Assim você construirá um ponto D, na interseção entre a reta e o eixo y.

8 – Clique com o direito na reta perpendicular ao eixo x e desmarque o item exibir objeto. Neste momento a reta perpendicular ao eixo x “desaparecerá”. Faça o mesmo para a reta perpendicular



ao eixo  $y$ . Neste momento a reta perpendicular ao eixo  $y$  “desaparecerá”.


9 – Clique em  e selecione Segmento. Clique no ponto B e em seguida no ponto C. Também clique no ponto B e em seguida no ponto D. Assim você construirá segmentos entre os pontos B e C e B e D. Clique com o botão direito encima desses segmentos (um por vez) e desmarque a opção exibir rótulo. Posteriormente clique no ponto A e em seguida no ponto C. Também clique no ponto A e em seguida no ponto D. Assim você construirá segmentos entre os pontos A e C e A e D.


10 – Clique encima do segmento BC com o botão direito e em seguida clique em configurações. Na aba Estilo clique em Estilo, escolhendo a opção pontilhada. Faça o mesmo para o segmento BD.


11 – Clique com o botão direito no segmento AC e clique em configurações, acessando a aba cor e escolhendo a cor azul. Faça o mesmo para o segmento AD escolhendo a cor vermelha.


12 – Clique com o botão direito no segmento AC e clique em configurações. Na aba estilo aumente a espessura da linha e a opacidade do traço. Faça o mesmo para o segmento AD.

13 – Clique com o botão direito encima do segmento em azul. Em seguida clique em renomear e escreva cosseno. Faça o mesmo com o segmento em vermelho, renomeando para seno.

14 – Clique em  e selecione Intersecção de Dois Objetos. Em seguida clique no eixo  $x$  e na circunferência (nesta ordem). Aparecerá pontos E e F no eixo  $x$ . Posteriormente clique no eixo  $y$  e na circunferência (nesta ordem). Aparecerá pontos H e G no eixo  $y$ .

15 – Clique em  e selecione Ângulo. Clique em F, A e B nesta ordem.


16 – Na caixa  “sen(alfa)”+(y(B)) e dê enter. Em seguida digite “cos(alfa)”+(x(B)). Com este passo você poderá visualizar os valores do seno e do cosseno.


17 – Clique em  e selecione Ângulo com Amplitude Fixa. Em seguida clique no botão F e posteriormente e A. Abrirá uma janela, na qual você digitará  $30^\circ$  selecionando sentido anti-horário. Assim você construirá um ponto F' sob a circunferência e um ângulo beta. Note que o ponto F' corresponde ao ângulo beta de  $30^\circ$ . Clique com o botão direito encima do ângulo beta e desmarque a opção “exibir objeto”. Atenção, não esconda o ângulo alfa.


18 – Converta o ângulo de  $30^\circ$  para radianos. Após clique com o botão direito encima do ponto F' e clique em configurações. Clique na aba Básico e no campo Legenda escreva o valor em radianos que corresponde ao ângulo de  $30^\circ$ .


19 – Repita os passos 17 e 18 para cada um dos ângulos  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$ ,

210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°, fazendo as respectivas conversões para radianos.

20 – Clique em  e selecione Reta Perpendicular. Em seguida clique no eixo x e no ponto F. Assim você construirá uma reta perpendicular ao eixo x passando pelo ponto F.

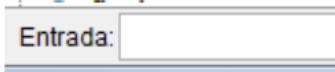
21 – Clique em  e selecione Reta. Em seguida clique nos pontos A e B. Você construirá uma reta que passa por A e B.

22 – Clique em  e selecione Interseção de Dois Objetos. Em seguida clique na reta que passa por A e B e a reta perpendicular ao eixo x que passa por F. Você construirá um ponto H, na interseção das retas. Posteriormente clique com o botão direito nessas duas retas (uma por vez) e desmarque a opção exibir objeto.

23 – Clique em  e selecione Segmento. Clique em A e H, nesta sequência. Clique acima do segmento AH e desmarque a opção exibir rótulo. Depois clique em H e F, nesta sequência.

24 – Clique com o botão direito no segmento HF e vá em configurações. Na aba Cor, modifique a cor do segmento para amarelo. Na aba Estilo modifique a espessura do segmento em amarelo.

Na aba Básico renomeie o segmento em amarelo para tangente.

25 – Na caixa  Entrada:  “tan(alfa)=”+(y(H)) e dê enter. Com este passo você poderá visualizar os valores da tangente.

Utilizando o ciclo trigonométrico que acabamos de construir, faça os exercícios a seguir.

1 – Arraste o ponto B colocando-o acima do ponto  $\frac{\pi}{6}$  e diga a que ângulo em graus este corresponde. Utilizando as relações trigonométricas conclua que a medida do segmento dado em azul corresponde ao cosseno do ângulo  $\frac{\pi}{6}$ , assim como a medida do segmento dado em vermelho corresponde ao seno do ângulo referido. Por fim conclua que a medida do segmento dado em amarelo corresponde a tangente do ângulo  $\frac{\pi}{6}$ .

2 – Arraste o ponto B colocando-o acima do ponto  $\frac{\pi}{4}$  e diga a que ângulo em graus este corresponde. Utilizando as relações trigonométricas conclua que a medida do segmento dado em azul corresponde ao cosseno do ângulo  $\frac{\pi}{4}$ , assim como a medida do segmento dado em vermelho corresponde ao seno do ângulo referido. Por fim conclua que a medida do segmento dado em amarelo corresponde a tangente do ângulo  $\frac{\pi}{4}$ .

3 – Os exercícios 1 e 2 nos mostram que a medida dos segmentos azul, vermelho e amarelo denotam a medida do cosseno, seno e tangente, respectivamente em relação ao ponto B. Sendo

assim arraste o ponto B sob o ponto  $\frac{3\pi}{4}$  e calcule o seno, cosseno e tangente deste ponto. Também arraste o ponto B sob o ponto  $\frac{4\pi}{3}$  e calcule o seno, cosseno e tangente deste ponto. Por fim calcule as relações trigonométricas para o ponto B acima do ponto  $\frac{5\pi}{3}$ . Explique por que encontramos alguns valores negativos.

4 - Utilize seu ciclo trigonométrico construído no GeoGebra, para localizar os arcos e verifique os valores do seno, cosseno e tangente de cada ângulo.

	0°	90°	180°	270°	360°
seno					
cosseno					
tangente					

5 - Complete a tabela abaixo com os valores correspondentes para seno, cosseno e tangente para cada ângulo em radianos, também transforme o valor de radianos em graus.

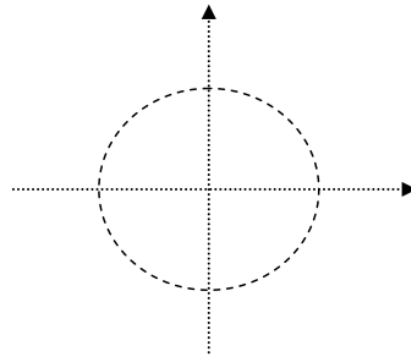
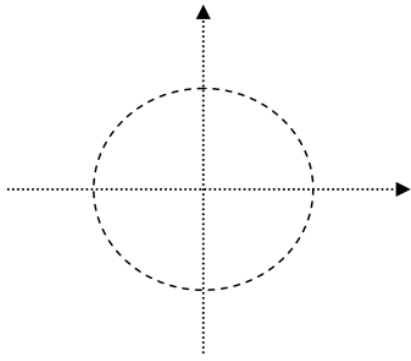
rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
graus												
sen												
cos												
tan												

a) Você observou alguma relação entre os valores obtidos para seno, cosseno e tangente dos ângulos, quais?

b) Como você explicaria isso?

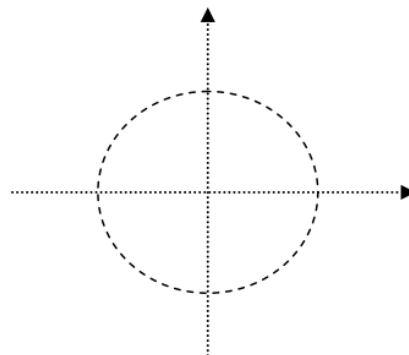
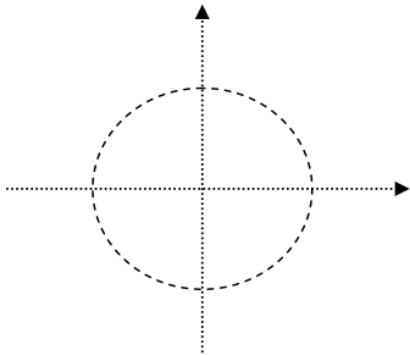
6 - Nos ciclos trigonométricos a seguir indique o sinal, em cada quadrante do seno, cosseno e tangente. Observe que da maneira com que construímos o valor do ângulo do ciclo trigonométrico cresce no sentido anti-horário. Tendo isso em vista indique, em cada quadrante, se valores de seno, cosseno e tangente crescem ou decrescem, considerando que o valor do ângulo do ciclo cresce. Para cada item explique como chegou ao resultado.

a) Seno:

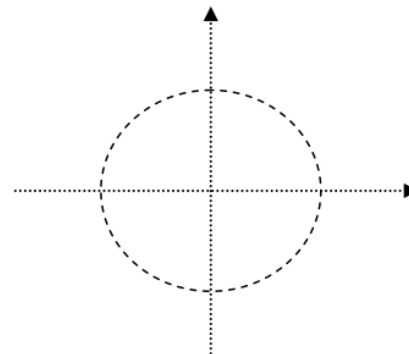
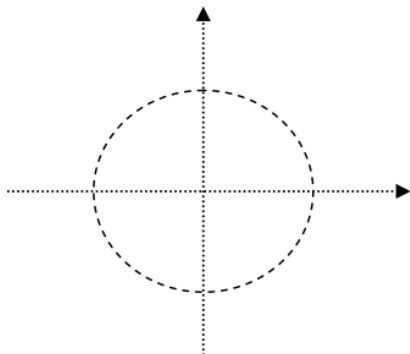


b)

Cosseno:



c) Tangente:



7<sup>a</sup> – Utilizando o ciclo trigonométrico calcule as razões abaixo salientando o

número de voltas em cada caso:

a)  $\text{sen}3465^\circ$

b)  $\text{sen} \frac{13\pi}{4}$

c)  $\text{sen}4320^\circ$

d)  $\text{sen} \left( \frac{-10\pi}{3} \right)$

e)  $\text{cos}1485^\circ$

f)  $\text{cos} \left( \frac{-19\pi}{4} \right)$

g)  $\text{cos}6000^\circ$

i)  $\text{cos} \frac{23\pi}{6}$

j)  $\tan 3000^\circ$

k)  $\tan \frac{30\pi}{7}$

7 – Em quais quadrantes os arcos têm seno e cosseno com o mesmo sinal? Nesses quadrantes, para quais valores de  $\alpha$  temos  $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$ ?

8 – No ciclo trigonométrico que você acabou de construir, posicione o ponto B sob o ponto  $\frac{\pi}{3}$ . Note é possível observar um triângulo retângulo, que relaciona os valores de seno e cosseno.

a) Que relação é essa? Varie o ângulo (ou seja, varie a posição do ponto B) e conclua que tal relação é válida para qualquer ângulo.

b) Com a relação obtida, sabendo que  $x$  é um arco do primeiro quadrante e que  $\operatorname{sen} x = 0,8$ , determine  $\operatorname{cos} x$  e  $\operatorname{tg} x$ .

c) Se  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  e  $4\operatorname{sen}(x) + 1 = 0$  então calcule  $\operatorname{cos}(x)$ .

d) Sendo  $\operatorname{cos}(x) = \frac{1}{4}$ , quanto vale  $\operatorname{sen}(x)$ , para  $x$  no intervalo  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ?

9 – Calcule o valor das expressões abaixo

a)  $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{cos}(0^\circ) + 2\operatorname{cos}(60^\circ) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ;

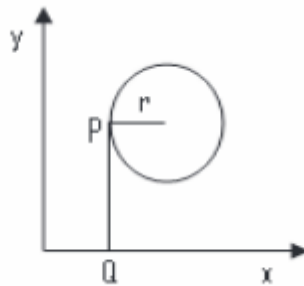
b)  $3\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{cos}(360^\circ)$ ;

c)  $\frac{2\operatorname{sen}(\pi) + 3\operatorname{cos}(2\pi)}{3}$ ;

d)  $\frac{4\operatorname{cos}(\pi) - 3\operatorname{sen}(2\pi)}{2\operatorname{cos}(0)}$ ;

10 – Utilizando o ciclo trigonométrico mostre quais são os valores de máximo e mínimo para o seno, cosseno e tangente.

11 - (Enem 2009 Questão 174) Considere um ponto P em uma circunferência de raio  $r$  no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo  $x$ , como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância  $d < r$ .



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por?

R: Seja  $x$  a distância que queremos determinar. Então dado que  $d < r$  temos que tal distância é dada por  $x = r - (r - x) = r - \left(r \cos \frac{d}{r}\right)$ .

12- (Enem – 2004) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado “Mineirinho”, conseguiu realizar a manobra denominada “900”, na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação “900” refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

- a) uma volta completa.
- b) uma volta e meia.
- c) duas voltas completas.
- d) duas voltas e meia.
- e) cinco voltas completas.

Resposta: d) duas voltas e meia.

### 3.3.2 Referências

DANTAS, Aleksandre Saraiva. O uso do GeoGebra no ensino de trigonometria: uma experiência com alunos do ensino médio. *Ciência e Natura*, Santa Maria, v. 37, ago. 2018.

LOPES, Maria Maroni. Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 631-644, ago./set. 2013. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n46/v27n46a19.pdf>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

PEDROSO, Leonor Wierzinski. Uma proposta de ensino da trigonometria com o uso do

geogebra. Rio grande do sul: [s.n.], 2012. 270 p.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Inep. Disponível em: <[www.inep.gov.br/](http://www.inep.gov.br/)>. Acesso em: 04 ago. 2018.

### **3.3.3 Relatório – 18/08/2018**

No dia 18 de agosto de 2018, realizamos o terceiro encontro de aula da nossa regência no PROMAT. Iniciamos o Estudo do ciclo trigonométrico, usando a metodologia de mídias tecnológica; levamos os alunos ao laboratório de informática; o objetivo deste encontro é fazer a construção do ciclo trigonométrico utilizando o GeoGebra, mostrando aos alunos, quão interessante é esse aplicativo para a construção de conceitos matemáticos.

A Utilização de tecnologias diversas durante as aulas possibilita despertar o interesse dos discentes e sua curiosidade sobre os conteúdos ensinados. Além de suprir dificuldades dos alunos com relação a desenho, esboço de gráficos, análise de gráfico, dentre outros. Percebemos importância de uma aula diferenciada, instigando um novo conhecimento por meio de uma metodologia nova, utilizando a era digital da modernidade computacional muito usada pelos discentes.

No decorrer da aula tivemos uma interação muito intensa com os alunos pela dificuldade de manusear os ícones no GeoGebra, mas ao passar das horas foram sendo vencidas essas barreiras, pelos alunos pela destreza com a tecnologia computacional, construindo assim os conhecimentos necessários para a construção do ciclo trigonométrico.

Após essa construção e pelas atividades descritas no plano de aula, fomos junto com os alunos observando as relações no ciclo trigonométrico e conceituamos o que de fato eles perceberam que acontecia nessa experiência.

Percebemos que foi muito empolgante a aula e todos nós tivemos grande proveito pela experiência nova e pela construção do conhecimento matemático por parte dos alunos e nossa na função de professores, por trabalhar com uma metodologia diferenciada e termos atingido nosso objetivo.

### **3.4 Plano de aula – 25/08/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Trigonometria, ciclo trigonométrico.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos aprendam funções trigonométricas.

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Construir o conceito de função trigonométrica;

**Recursos Didáticos:** GeoGebra, material impresso do aluno, quadro negro e giz.

#### **3.4.1 Encaminhamento Metodológico**














Observação: os estagiários devem abordar cada problema fazendo a leitura em voz alta para iniciar a resolução. Os problemas serão resolvidos individualmente, e no momento em que os alunos estiverem resolvendo, os estagiários devem circular entre assumindo uma postura orientadora e questionadora sem explicitar a resposta. Após este período, o mesmo deve fazer a resolução no quadro do problema em questão.

1º Faremos a correção da lista da aula passada salientando algumas questões sobre o ciclo trigonométrico.

2º Faremos a construção das funções trigonométricas no GeoGebra e posteriormente uma lista de exercícios análoga a feita na aula passada.

Roteiro



- 1 - Abra o  arquivo do ciclo trigonométrico construído na aula anterior.
- 2 - Clique em  e selecione “arco circular”, no ciclo selecione os pontos A,F e B, nesta ordem;
- 3 - Observe que você construiu o arco d. Clique com o botão direito encima do arco d e selecione configurações. Coloque a cor do arco como verde e aumente a espessura do arco.
- 4 - Clique na aba exibir e selecione “janela de visualização dois”. Observe que agora você tem três janelas em sua tela, para saber qual está selecionada, basta observar qual apresenta o título em negrito.
- 5 - Clique em  e centralize a nova  janela de exibição. No canto superior da tela clique em  uma engrenagem.  No botão selecione a aba “eixo x” e em “distância” marque  $\frac{\pi}{2}$ .
- 6 - Clique com o botão direito na janela de exibição 2 e selecione a opção Malha. Em seguida clique em  e digite (d,0). Note que  você construiu um ponto I na segunda janela de visualização. Clique em  e mova o ponto B. Note que o ponto I se move ao passo que movemos o ponto B, e ainda ocorre que a  medida do arco percorrido no ciclo  trigonométrico é igual a medida que o ponto I caminha no eixo x.
- 7 - Clique em  e selecione a janela de exibição 2. Em seguida em  digite (d,x(B)) e note que aparecerá um ponto J.
- 8 - Clicando com o botão direito do mouse no ponto J, selecione configurações, modificando sua cor para a mesma cor que deu ao cosseno. Clicando com o botão direito do mouse no ponto J, novamente clique na opção exibir rastro. Perceba que ao mover o ponto B no ciclo o ponto J realiza a trajetória no gráfico, demonstrando como fica a função cosseno.
- 9 - Clique em  e selecione a janela de exibição 2. Em seguida em  digite (d,y(B)) e note que aparecerá um ponto K.
- 10 - Clicando com o botão direito do mouse no ponto K, selecione configurações, modificando sua cor para a mesma cor que deu ao seno. Clicando com o botão direito do mouse no ponto K, novamente clique na opção exibir rastro. Perceba que ao mover o ponto B no ciclo o ponto K realiza a trajetória no gráfico, demonstrando como fica a função seno.
- 11 - Clique em  e selecione a janela de exibição 2. Em seguida em  digite (d,y(B)) e note que aparecerá um ponto L.
- 12 - Clicando com o botão direito do mouse no ponto L, selecione configurações, modificando sua cor para a mesma cor que deu ao seno. Clicando com o botão direito do mouse no ponto L, novamente clique na opção exibir rastro. Perceba que ao mover o ponto B no ciclo o ponto L

realiza a trajetória no gráfico, demonstrando como fica a função tangente.

## Exercícios

Observando os gráficos das funções trigonométricas construídos em aula, responda:

- Qual é o domínio das funções seno, cosseno e tangente?
- Qual é o conjunto imagem das funções seno, cosseno e tangente?
- Em que quadrantes a função seno é crescente? E decrescente?
- Em que quadrantes a função cosseno é crescente? E decrescente?
- Em que quadrantes a função tangente é crescente? E decrescente?
- O que se observa nos valores de seno, cosseno e tangente, quando o valor de  $x$  se aproximam de  $\frac{\pi}{2}$ ?
- Quais são os períodos das funções seno, cosseno e tangente?
- Com o auxílio do GeoGebra, verifique, o que aconteceria com os gráficos das funções seno, cosseno e tangente se continuássemos para valores negativos ou maiores que  $2\pi$ ?
- Quais os valores de máximo e mínimo que atingem as funções seno, cosseno e tangente?

2 - Com a ajuda do GeoGebra esboce o gráfico da expressão:  $y = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$ . O que podemos afirmar ao comparar o gráfico dessa função e o exercício 8 da aula anterior?

3 - Se  $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$  e  $\sin x = \frac{-15}{17}$  então determine o valor de  $\cos x$ ?

4 - Construa o gráfico de  $f(x) = \sin x$ , com o auxílio do GeoGebra clicando em  e digitando  $y = \sin(x)$ . Defina o período e a imagem. Na janela de álgebra, apague a função que você criou e refaça o mesmo processo para as seguintes funções, sempre apagando a anterior para não misturar as ideias.

- $f(x) = 2\sin(x)$ ;
- $f(x) = \sin(2x)$ ;
- $f(x) = \sin(x) + 2$ ;
- $f(x) = \sin(x) - 5$ ;
- $f(x) = -\sin(x)$ ;
- $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ;

g) Quais as relações (sobre período e imagem) de cada uma dessas funções com  $f(x) = \text{sen}x$ ?

5 - Construa o gráfico de  $f(x) = \text{cos}x$ , com o auxílio do GeoGebra clicando em  e digitando  $y = \text{cos}(x)$ . Defina o período e a imagem. Na janela de algebra, apague a função que você criou e refaça o mesmo processo para as seguintes funções, sempre apagando a anterior para não misturar as ideias.

a)  $f(x) = 2\text{cos}(x)$ ;

b)  $f(x) = \text{cos}(2x)$ ;

c)  $f(x) = \text{cos}(x) + 2$ ;

d)  $f(x) = \text{cos}(x) - 5$ ;

e)  $f(x) = -\text{cos}(x)$ ;

f)  $f(x) = \text{cos}\left(\frac{x}{2}\right)$ ;

g) Quais as relações (sobre período e imagem) de cada uma dessas funções com  $f(x) = \text{cos}x$ ?

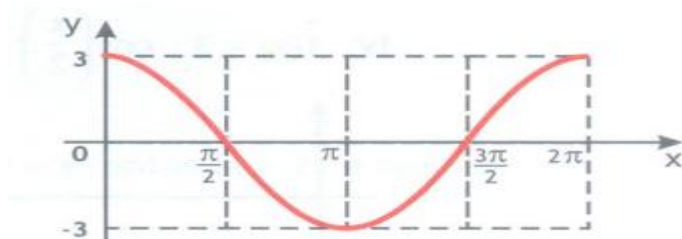
6 - Tendo em vista os exercícios 4 e 5 ,

a) O que podemos dizer quando multiplicamos o argumento funções seno e cosseno por um número real? Isto nos dá uma variação no período ou na imagem da função em questão?

b) O que podemos dizer quando multiplicamos as funções seno e cosseno por um número real “fora” do argumento? Isto nos dá uma variação no período ou na imagem da função em questão?

c) O que podemos dizer quando somamos um número real “fora” do argumento? Isto nos dá uma variação no período ou na imagem da função em questão?

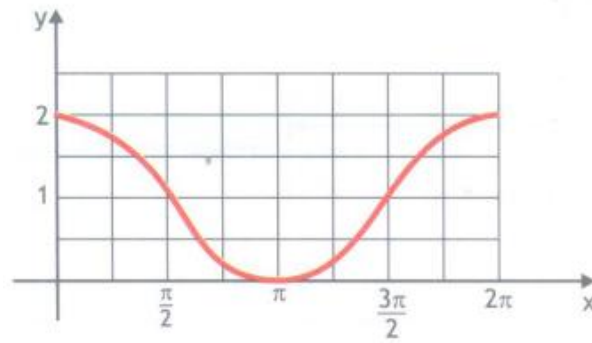
6 - A função real representada no gráfico é  $y = m\text{cos}x$ . Determine o valor de  $m$ .



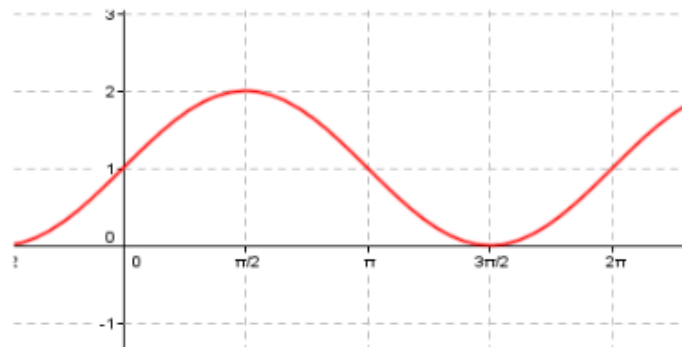
7 - Os gráficos abaixo representam funções trigonométricas. Determine de maneira intuitiva qual a função, que melhor caracteriza cada gráfico abaixo, justificando sua resposta. Determine

também o período e a imagem função.

a)



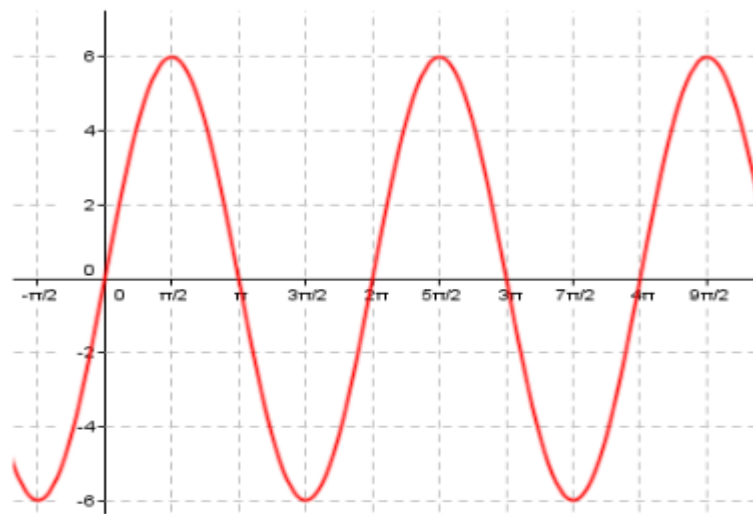
b)



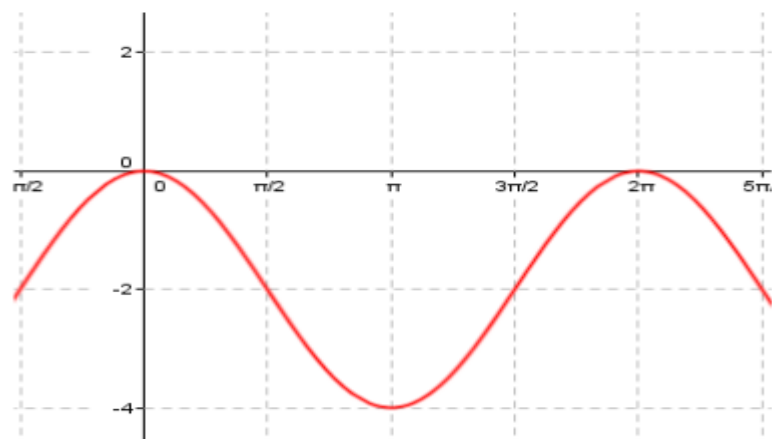
c)



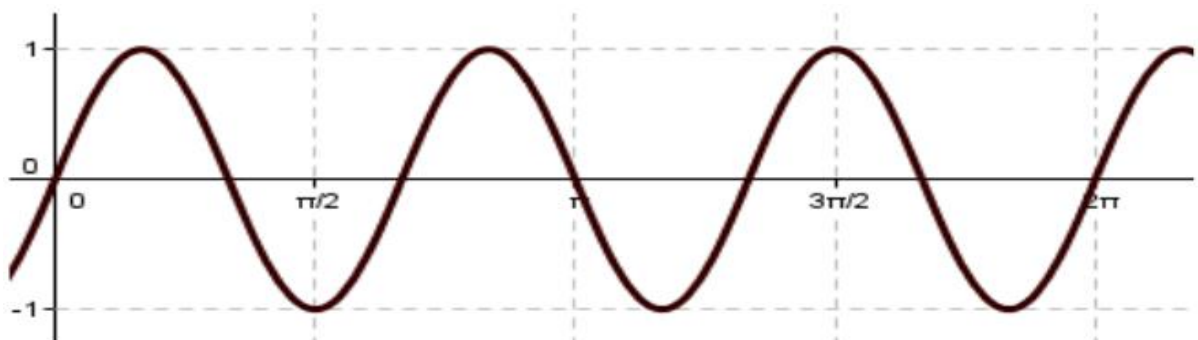
d)



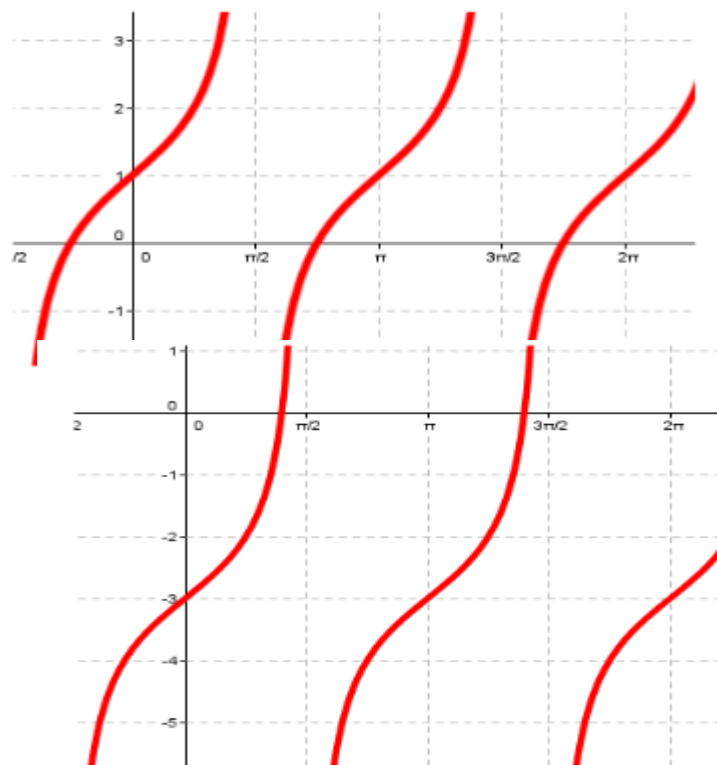
e)



f)



g)



h)

8 – (ENEM – 2015 Questão 176) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço  $P$ , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função  $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$  onde  $x$  o mês do ano associado. Por exemplo  $x=1$  representa o mês de janeiro,  $x=2$  mês de fevereiro e assim por diante. Na safra, qual foi o mês de produção máxima?

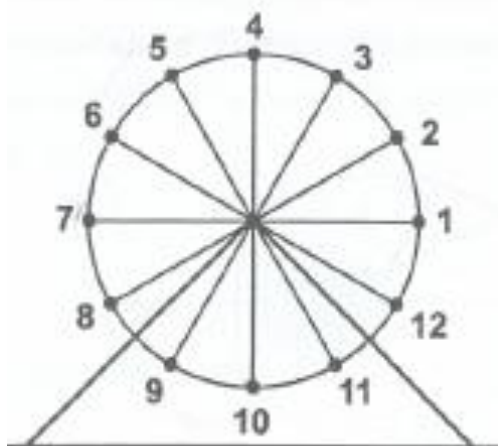
Resolução: Note que pela lei da oferta e demanda demanda máxima = preço mínimo. Observando que a função cosseno é limitada inferiormente por  $-1$ , assim como nesse ponto ela atinge o seu valor de mínimo, então como  $\cos(\pi) = -1$  basta estudarmos a equação  $\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow x = 7$ .

9 – Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes

possa ser calculado por uma função  $f(x) = 900 - 800\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right)$ , onde  $f(x)$  é o número de clientes e  $x$  é a hora da observação ( $x$  é um inteiro tal que  $0 \leq x \leq 24$ ). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a quanto?

Resolução: Nesta função o seno atinge seu máximo em  $x = 18$  com  $f(x) = 1700$  e seu mínimo em  $x = 6$  com  $f(x) = 100$ . Então a diferença é dada por 1600

10 - Imagine uma roda gigante com 12 cadeiras igualmente espaçadas.



- Qual o ângulo formado entre duas cadeiras?
- Sabe-se também que a roda gigante demora cerca de 30 segundos a efetuar uma rotação completa. Quanto tempo leva para uma cadeira ocupar a posição da outra cadeira que vem na sequencia? Por que 30 segundos é o período da roda gigante?
- O raio da roda gigante é de 10m. O ponto mais baixo atingido ao longo do percurso circular está a 0,5 m do solo. Considere a cadeira inicial, no tempo  $t = 0$ , como marcada com número 1 no desenho acima e complete a tabela. Considere ainda  $A$  como sendo o ângulo formado entre a posição inicial 1 e a posição ocupada após  $t$  segundos. Complete a tabela que segue a partir destas informações.





constantes reais positivas e  $t$  representa a variável tempo, medida em segundos. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os seguintes dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função  $P(t)$  obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi?

Resolução: Inicialmente escrevemos  $78 = A + B(-1)e^{120} = A + B(1)$  devido as hipóteses sobre máximo e mínimo. Isso nos resulta que  $B = 21eA = 99$ . Note que temos a seguinte regra de três, devido a hipótese sobre o período  $\frac{3}{2} = \frac{k}{2\pi}$  e encontramos o valor de  $k$ .

### 3.4.2 Referências

LOPES, Maria Maroni. Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 631-644, ago./set. 2013. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n46/v27n46a19.pdf>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

PEDROSO, Leonor Wierzinski. Uma proposta de ensino da trigonometria com o uso do geogebra. Rio grande do sul: [s.n.], 2012. 270 p.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Inep. Disponível em: <[www.inep.gov.br/](http://www.inep.gov.br/)>. Acesso em: 04 ago. 2018.

### 3.4.3 Relatório – 25/08/2018

No dia 25 de agosto de 2018, realizamos o quarto encontro da nossa regência no PROMAT. Esta aula foi no laboratório de informática, por ser continuação do encontro passado; retomamos o que tínhamos trabalhado na aula anterior e fizemos a correção das atividades. Após nós termos feito isso, iniciamos o estudo das funções trigonométricas, usando a metodologia de mídias tecnológicas e situação problemas aplicada no Enem.

Buscamos desenvolver a autonomia do discente por meio de atividades diversificadas, elaborando-se uma sequência de roteiro de atividades distintas desenvolvida com os alunos,

utilizando o software GeoGebra para a construção e análise de uma circunferência trigonométrica e os gráficos das funções seno, cosseno e tangente. Pelo que percebemos, a utilização do software possibilitou uma aprendizagem mais significativa, viabilizando trabalhar a geometria em conjunto com a álgebra, agilizando assim a resolução de problemas e a compreensão do conteúdo explicado em sala de aula.

Ao analisarmos nossa aula, notamos que propor aulas diversificadas desperta nos alunos a vontade de participarem, de se envolverem e aumentam suas curiosidades sobre o conteúdo. O uso desta ferramenta tecnológica teve por objetivo, auxiliar nós professores na prática em sala de aula e dinamizar o processo de ensino e aprendizagem. Sempre que possível, levamos em conta as aplicações do dia a dia, dos conteúdos aprendidos, como no caso das medidas de distâncias inacessíveis, usando a trigonometria e expondo uma situação problema a qual incentive o discente a refletir sobre como medir? Qual conceito utilizar? Quais são as outras formas de descobrir a distância?

Sendo assim, os alunos perceberam que geralmente, no caso de medidas de distâncias inacessíveis, é utilizado o conteúdo de trigonometria e essas situações problemas possuem as funções trigonométricas, as quais podem aparecer no dia a dia, possibilitando a contextualização e interdisciplinaridade entre os conceitos matemáticos e a realidade do discente. Fazendo com que eles observe, que a parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos e nessas funções trigonométricas terem a oportunidade de conhecer os gráficos contendo a senoide, cossenoide e tangente entre outros gráficos. A participação dos alunos é vital, pois eles devem ser os mais interessados em trabalhar a construção do conhecimento, a aplicação desse conhecimento e utilização dos seus conhecimentos prévios nesse processo é muito importante.

Assim sendo, esperamos que ao apresentar essa proposta de atividades, as quais podem ser executadas em sala de aula ou no laboratório de informática, possamos aumentar as possibilidades de ofertar uma aula de qualidade para os discentes e acrescentar práticas exitosas na vida profissional do professor de matemática.

### **3.5 Plano de aula - 01/09/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Geometria analítica, plano cartesiano.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos aprendam a localizar pontos no plano cartesiano, e calcular a distância entre pontos.

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Localizar pontos no plano cartesiano;
- Compreender a geometria analítica como uma extensão da própria geometria euclidiana;
- Visualizar aplicações da geometria analítica no cotidiano;
- Reconhecer o eixo das abscissas e o das ordenadas;
- Identificar a coordenada de um ponto qualquer do plano;
- Marcar pontos e traçar objetos geométricos simples em um plano cartesiano;
- Calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

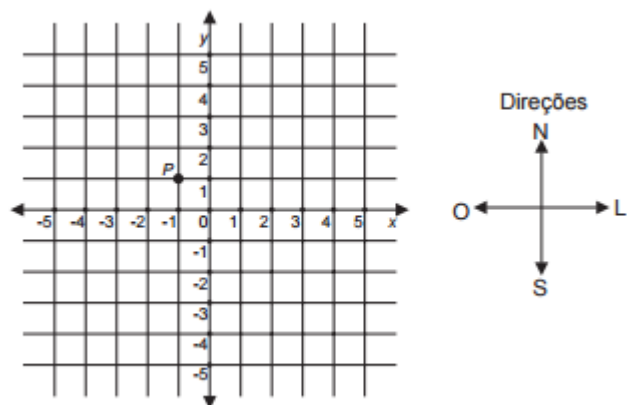
**Recursos Didáticos:** Quadro, giz, compassos, réguas, papel quadriculado, data show.

### Encaminhamento Metodológico

Iniciar a aula com uma apresentação de slides que traz alguns conceitos sobre a geometria analítica, e aplicações desta no cotidiano.

Em seguida, passar o problema 1

**Problema 1' - (Enem 2014)** Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração.



A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento

de  $y$ , e a direção leste-oeste é a mesma do eixo  $x$ , sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de  $x$ .

Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano

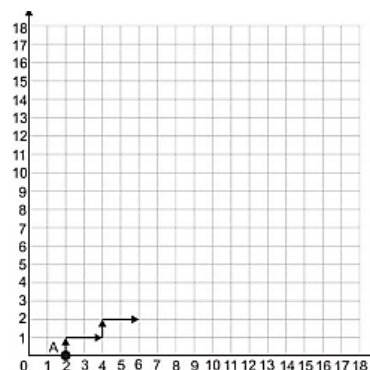
Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, qual será a posição do robô, no plano cartesiano?

*Solução:* o robô estará no ponto  $P'(1,2)$

**Problema 2** (Enem – 2016): Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto  $O$ , origem do plano cartesiano  $xOy$ . Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h. Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

*Solução:* A formiga que caminhou horizontalmente terá andado 8 km no eixo  $x$ , parando no ponto  $(8,0)$ . A formiga que caminhou verticalmente terá andado 6 km em duas horas, parando no ponto  $(0,6)$ .

**Problema 3** - O gráfico a seguir mostra o início da trajetória de um robô que parte do ponto  $A(2, 0)$ , movimentando-se para cima ou para a direita, com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano. O gráfico exemplifica uma trajetória desse robô, durante 6 segundos.



Supondo que esse robô continue essa mesma trajetória, qual será sua coordenada após 18 segundos de caminhada, contando o tempo a partir do ponto  $A$ ?

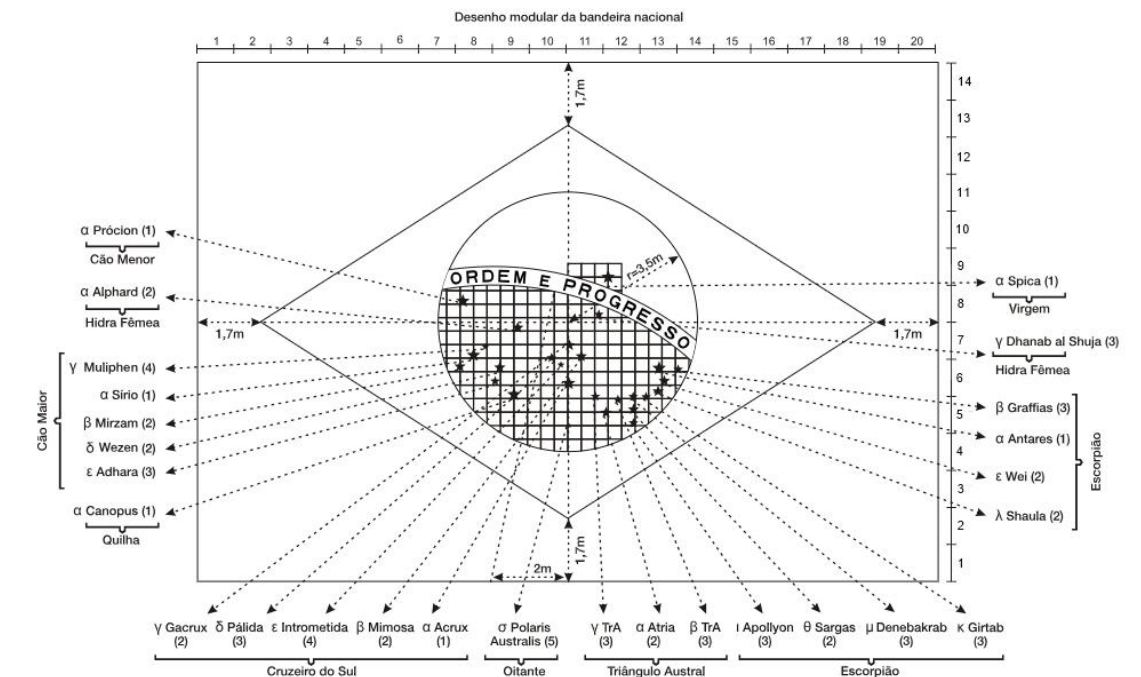
*Resposta:*  $(14,6)$

Após esses problemas, entregar a cada aluno uma folha de papel milimetrado, na qual devem desenhar a bandeira do Brasil utilizando uma escala que conserve as medidas ditadas pelo Inmetro. Orientar os alunos que determinem a coordenada de cada vértice do retângulo, e

também do losango, para posteriormente representa-los na figura.



Fonte: Inmetro.



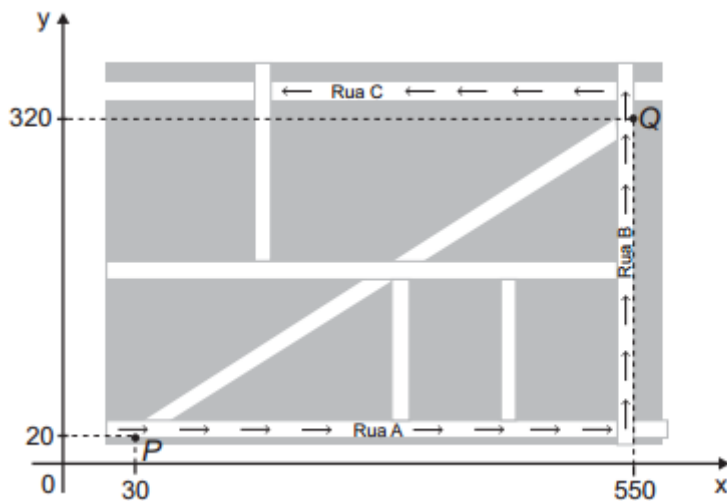
Fonte:

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/be/Flag\\_of\\_Brazil\\_%28dimensions%29.s](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/be/Flag_of_Brazil_%28dimensions%29.s)

vg

Corrigir a atividade realizando a construção da bandeira no software GeoGebra, e em seguida fazer o problema 4:

**Problema 4 (Enem – 2015):** Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



a) Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, quais são as coordenadas do novo ponto de parada?

*Solução:* Determinando um ponto R no encontro entre as ruas A e B, temos que a distância entre P e R é dada por

$$d_{PR} = 550 - 30 = 520.$$

Analogamente, a distância entre R e Q é dada por

$$d_{RQ} = 320 - 20 = 300,$$

e assim,

$$d_{PR} + d_{RQ} = 520 + 300 = 820.$$

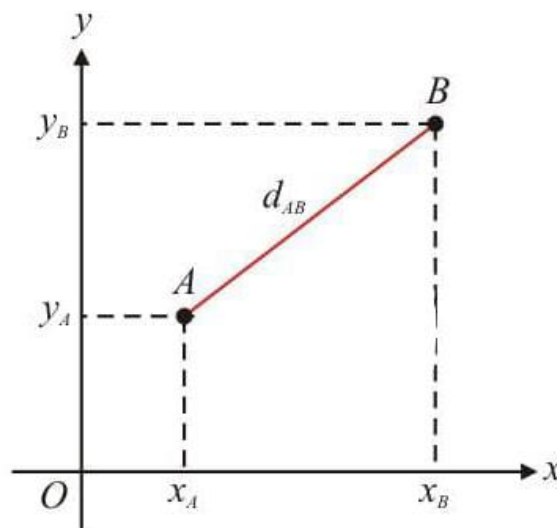
Logo, metade dessa distância é igual a 410 unidades, e assim, o novo ponto de parada T estará sobre a Rua A, mais especificamente, no ponto  $T(440, 20)$ .

b) Sabendo-se que o gráfico está graduado em metros, qual é a menor distância entre os pontos P e Q, em metros?

*Solução:* Observe que a menor distância entre P e Q é dada pela hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são os segmentos PR e RQ. Assim, através do teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}(PR)^2 + (RQ)^2 &= (PQ)^2 \\ \Rightarrow (520)^2 + (300)^2 &= (PQ)^2 \\ \Rightarrow 270400 + 90000 &= (PQ)^2 \\ \Rightarrow 360400 &= (PQ)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{360400} &= PQ \\ \Rightarrow PQ &\cong 600,33m\end{aligned}$$

**Problema 5:** Determine a distância entre os pontos  $A(X_A, Y_A)$  e  $B(X_B, Y_B)$ .



Espera-se com esse exercício deduzir a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, para posteriormente usá-la nos próximos exercícios.

Após a correção formalizar o conceito:

**Conceito:** A distância entre dois pontos  $A(X_A, Y_A)$  e  $B(X_B, Y_B)$  é dada por

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

**Problema 6** – Para participar do PROMAT na universidade Estadual do Oeste do Paraná, um aluno faz o seguinte trajeto, todos os sábados: Sai de sua casa, localizada no ponto  $A(53,53)$ , anda até o ponto  $B(46,52)$ , onde vira a esquerda e caminha até o ponto  $C(47,25)$ , em seguida vira à direita e caminha até o ponto  $D(22,23)$ , donde segue até o ponto  $E(14,19)$ . Por fim, basta que caminhe mais 300 metros até que chega ao seu destino final no ponto  $F(15,4)$ . Qual a distância total percorrida por esse aluno?



**Solução:** Primeiro precisamos encontrar a escala do gráfico apresentado no plano cartesiano. Sabemos que a distância entre os pontos E e F na realidade é igual a 300 metros. Vamos agora calcular essa distância no plano cartesiano:

$$d_{EF} = \sqrt{(X_E - X_F)^2 + (Y_E - Y_F)^2}$$

$$d_{EF} = \sqrt{(14 - 15)^2 + (19 - 4)^2}$$

$$d_{EF} = \sqrt{(1)^2 + (15)^2}$$

$$d_{EF} = \sqrt{(1)^2 + (15)^2}$$



$$d_{EF} = \sqrt{226}$$

$$d_{EF} = 15,0332$$

Agora podemos descobrir através de uma regra de três a escala do mapa.

Distância real	Distância mapa
300	15,0332
x	1

$$15,0332x = 300$$

$$x = \frac{300}{15,0332} \cong 19,96 \cong 20 \text{ metros.}$$

Prosseguindo com o cálculo das distâncias, temos

$$d_{DE} = \sqrt{(X_D - X_E)^2 + (Y_D - Y_E)^2}$$

$$d_{DE} = \sqrt{(22 - 14)^2 + (23 - 19)^2}$$

$$d_{DE} = \sqrt{8^2 + 4^2}$$

$$d_{DE} = \sqrt{80}$$

$$d_{DE} \cong 8,9442$$

E, multiplicando pela escala do gráfico:

$$8,9442 \times 20 = 178,884 \text{ metros.}$$

$$d_{CD} = \sqrt{(X_C - X_D)^2 + (Y_C - Y_D)^2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{(47 - 22)^2 + (25 - 23)^2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{25^2 + 2^2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{629} \cong 25,0798$$

$$d_{CD} \cong 25,0798 \times 20 = 501,596 \text{ metros.}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(46 - 47)^2 + (52 - 25)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-1)^2 + (27)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{730} \cong 27,0185$$

$$d_{BC} \cong 27,0185 \times 20 = 540,37 \text{ metros.}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(53 - 46)^2 + (53 - 52)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(7)^2 + (1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{50} \cong 7,071$$

$$d_{AB} \cong 7,071 \times 20 = 141,42 \text{ metros.}$$

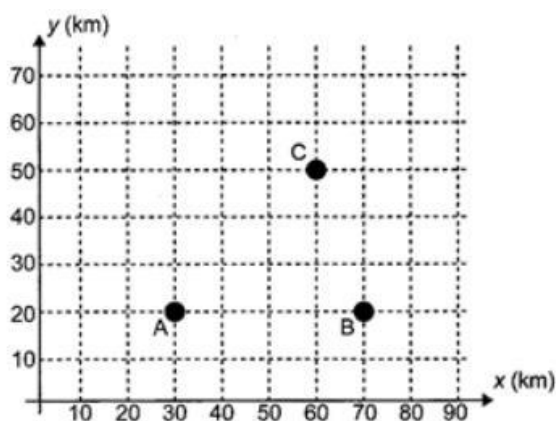
Agora, resta somar todas essas distâncias:

$$d_{AB} + d_{BC} + d_{CD} + d_{DE} + d_{EF}$$

$$141,42 + 540,37 + 501,596 + 178,884 + 300$$

$$1662,27 \text{ metros.}$$

**Problema 7 (ENEM – 2013)** Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscado levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano.



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

Quais as coordenadas do ponto adequado para a construção dessa torre?

Após estes problemas, passar o problema 8 para introduzir a ideia de ponto médio de um segmento:

*Solução:* Queremos saber as coordenadas de um ponto  $T(x,y)$  que cumpra as seguintes condições:

$$d_{AT} = d_{BT} = d_{CT}$$

Temos:

$$\begin{aligned}(30 - X)^2 + (20 - Y)^2 &= (70 - X)^2 + (20 - Y)^2 \\ \Rightarrow (30 - X)^2 &= (70 - X)^2 \\ \Rightarrow 900 - 60X + X^2 &= 4900 - 140X + X^2 \\ \Rightarrow 60X + 140X &= 4900 - 900 \\ \Rightarrow 80X &= 4000 \\ \Rightarrow X &= 50\end{aligned}$$

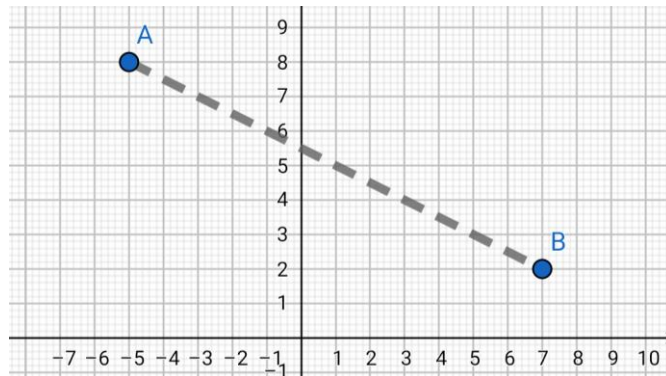
Agora, para descobrir a coordenada  $Y$  usaremos a outra igualdade,

$$\begin{aligned}(70 - 50)^2 + (20 - Y)^2 &= (60 - 50)^2 + (50 - Y)^2 \\ 400 + (20 - Y)^2 &= 100 + (50 - Y)^2 \\ 400 + 400 - 40Y + Y^2 &= 100 + 2500 - 100Y + Y^2 \\ 800 - 40Y &= 2600 - 100Y \\ -40Y + 100Y &= 2600 - 800 \\ 60Y &= 1800\end{aligned}$$

$$Y = 30$$

Logo, o ponto correspondente ao local da torre deve ser o ponto T(50,30)

**Problema 8:** Em certo trecho em linha reta de uma estrada será instalado uma placa equidistante das extremidades. Determine a coordenada do ponto M em que a placa será instalada e a distância entre a placa e os pontos A e B, considerando que o plano cartesiano está graduado em quilômetros.



*Solução:* O ponto médio é dado pelas coordenadas:

$$x = \frac{-5 + 7}{2} = 1$$

e

$$y = \frac{8 + 2}{2} = 5$$

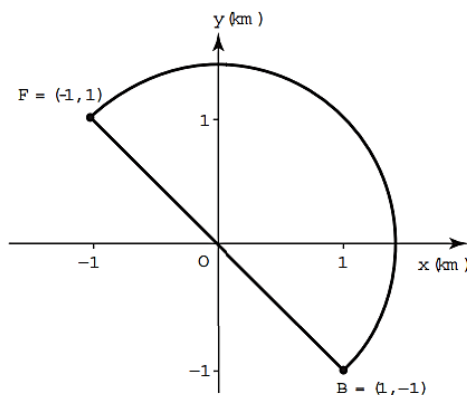
Logo, a placa deverá ser instalado no ponto (1,5).

**Conceito:** dado um segmento de reta  $AB$  tal que  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  são pontos distintos, as coordenadas de  $M$ , ponto médio de  $\overline{AB}$  são dadas por:

$$x = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \text{ e } y = \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

**Problema 9 (Enem – 2016):** Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que

contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas  $xOy$  da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



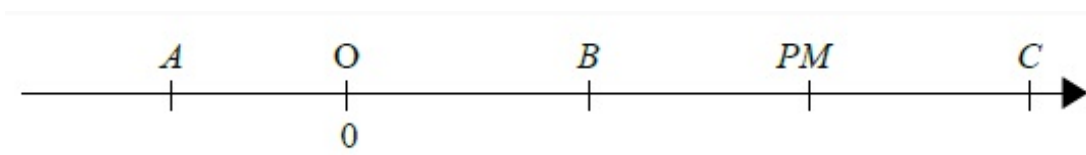
Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para  $\pi$  e 1,4 como aproximação para  $\sqrt{2}$ .

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

**Problema 10 (CONPASS 2018)**- Um carro percorreu em uma região plana 320km na direção oeste, depois 180km na direção sul, em seguida 220km na direção oeste, então 480km na direção norte, mais 300km na direção leste e concluiu o trajeto com 200km na direção sul. Qual é a distância em linha reta entre a posição inicial e a posição final deste carro?

**Problema 11 (Unioeste – 2011)**: Quatro pontos, A, B, C e PM estão dispostos sobre a reta orientada como ilustra a figura a seguir



Seja  $x$  a distância do ponto A até a origem O. Sabendo-se que a distância do ponto B até O vale  $\frac{3x}{2}$  e que a distância do ponto C até O vale  $\frac{9x}{2}$ , então para que a distância de PM até A não seja maior que 10, qual é o maior valor possível para  $x$ ?

**Problema 12 (UNIRIO):** Uma universidade organizou uma expedição ao sítio arqueológico de Itaboraí, um dos mais importantes do Rio de Janeiro. Para facilitar a localização dos locais de escavação, foi adotado um sistema cartesiano de coordenadas. O objetivo da expedição é realizar escavações nos pontos A (0, 0), B (6, 18) e C (18, 6). Se o chefe da expedição pretende acampar em um ponto equidistante dos locais de escavação determine as coordenadas do local do acampamento.

### 3.5.2 Referências

SEQUÊNCIAS DE AULAS DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO  
CARTESIANO Disponível em:

<http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1326#primeira> Acesso em 15 mai 2018.

### 3.5.3 Relatório 01/09/2018

No dia primeiro de setembro de 2018 realizamos o quinto encontro do PROMAT na universidade estadual do oeste do Paraná, campus de Cascavel. Compareceram a aula 16 alunos.

Iniciamos nesse dia o módulo de geometria analítica, sendo que este encontro foi voltado para o estudo de pontos no plano cartesiano, a localização, distância entre pontos e também o conceito de ponto médio.

Inicialmente, apresentamos algumas ideias sobre geometria analítica aos alunos, através de uma apresentação de slides. Mostramos a existência de outros sistemas de coordenadas e estabelecemos relações entre a geometria analítica e o cotidiano. Os principais exemplos envolviam a noção de pixels que constituem uma imagem, a distância percorrida por jogadores de futebol, aplicações de inclinação de reta na aviação e o estudo da circunferência no caso do acelerador de partículas LHC. Essa apresentação serviu para mostrar aos alunos que apesar de parecer um conteúdo abstrato, existem diversas aplicações em áreas que muitas vezes não imaginamos.

Em seguida, iniciamos o problema 1 que envolvia apenas a ideia de localização de pontos no plano cartesiano. Durante a resolução retomamos alguns conceitos com os alunos sobre a ordem das coordenadas para definir o ponto, lembrando também tópicos sobre o plano

cartesiano, como a orientação e nome dos eixos ordenados. Em geral, os alunos não apresentaram dúvidas quanto a trajetória dada no problema, mas alguns inverteram as coordenadas  $x$  e  $y$  na resposta final. Ressaltamos a importância de tomar cuidado com esses detalhes e a diferença entre os pontos  $(4,3)$  e  $(3,4)$ , por exemplo.

O segundo problema era semelhante ao primeiro, mas dessa vez pedia a coordenada de dois pontos diferentes, que representavam a trajetória de duas formigas em determinado tempo. As dúvidas mais frequentes nesse caso surgiram do fato das formigas se moverem sobre os eixos, uma sobre o eixo  $x$  e outra sobre o eixo  $y$ , de forma que a resposta final envolvia pontos da forma  $(0,y)$  e  $(x,0)$ . Alguns alunos acabavam invertendo a situação e as coordenadas.

Durante a correção, ressaltamos a ideia que um ponto sobre o eixo  $x$  sempre terá a ordenada igual a 0. Da mesma forma, um ponto sobre o eixo  $y$  sempre terá a abscissa igual a 0. Em seguida propomos a resolução do problema 3, o qual os alunos deram a resposta prontamente, por se tratar de uma situação simples e muito semelhante às anteriores.

Em seguida, realizamos uma atividade na qual os alunos deviam representar no plano cartesiano a bandeira do Brasil, mantendo a proporção dada pelo Inmetro. Para isso, foi necessário um estudo dos pontos adequados para vértices do retângulo, do losango e também para o centro da circunferência central. A correção dessa atividade foi feita no GeoGebra, onde localizamos os pontos citados e construímos os polígonos necessários a partir desses pontos. Aparentemente os alunos compreenderem bem a ideia de representar pontos no plano cartesiano.

Após essa atividade, encerramos a parte voltada à localização de pontos e iniciamos o conceito de distância entre pontos, através do problema 4. Inicialmente os alunos deviam encontrar uma distância de pontos que possuíam a mesma abscissa ou a mesma ordenada, de modo que uma subtração entre as coordenadas já dava a distancia. Esse processo foi facilmente compreendido pelos alunos, que apresentaram algumas dúvidas apenas no item b, no qual era necessário o cálculo da distância entre pontos que possuíam abscissas e ordenadas diferentes. Alguns apresentaram dúvidas quanto ao caminho a ser seguido para encontrar a solução do problema, enquanto outros visualizaram a possibilidade de utilizar o teorema de Pitágoras para descobrir tal distância. Com base nessa resolução, corrigimos esse problema e propomos que usassem o mesmo raciocínio no problema 5.

Enquanto andávamos pela sala auxiliando os alunos, percebemos que a maioria apresentava dúvidas pelo fato do problema envolver a distância entre dois pontos de coordenadas arbitrárias. Alguns alunos exclamaram que não poderiam efetuar uma operação se

não existissem números, então explicamos a eles que a ideia não era encontrar um número específico, mas trabalhar com as incógnitas a fim de encontrar uma expressão que servisse para calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Dessa forma, deduzimos a fórmula da distância entre dois pontos, que alguns alunos já haviam usado no problema 4.

Como o tempo era curto, após trabalhar com distância, precisamos optar por alguma das atividades seguintes, uma vez que não haveria tempo para todas as atividades previstas. Optamos então por definir a ideia de ponto médio, trazendo um problema sobre isso.

Em geral, os alunos aparentaram compreensão dos conceitos trabalhados e interesse na resolução dos problemas propostos.

### **3.6 Plano de aula – 15/09/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Geometria analítica, retas.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos aprendam a resolver problemas que necessitam utilizar retas ou segmentos.

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

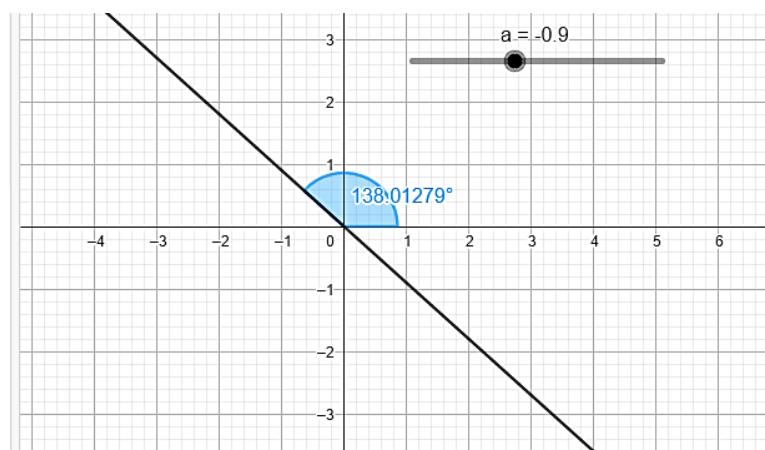
- Relacionar a inclinação da reta com a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo  $x$ ;
- Obter a equação reduzida e a equação geral da reta;
- Entender o significado do coeficiente angular e coeficiente linear de uma reta;
- Relacionar a equação da reta com o seu gráfico;
- Verificar se um ponto pertence a uma reta;
- Encontrar a intersecção entre duas retas;
- Encontrar reta perpendicular à outra reta;
- Calcular a distância de um ponto até uma reta.



**Recursos Didáticos:** Quadro, giz, material do aluno, jogo da memória, *GeoGebra*.

### Encaminhamento Metodológico

Explicar o conceito de inclinação de reta através do *GeoGebra*, conforme a figura abaixo. Primeiramente explicar aos alunos que uma reta é uma linha infinita definida por dois pontos distintos, uma vez que até o momento apenas se usou o conceito de segmento de reta. Orientar os alunos quanto a representação de uma reta no gráfico mostrando que uma vez que não podemos estender a reta em ambas as direções infinitamente devido as limitações do papel, é comum desenhá-la como um segmento, com setas nas extremidades, indicando que deve se estender nesse sentido.



**Cruzadinha:** Entregar a cruzadinha aos alunos para investigar conhecimentos prévios para em seguida explicar utilizando o software e definir conceitos junto com os alunos.

Com o controle deslizante, mostrar aos alunos como o ângulo varia de acordo com a inclinação da reta. Explicar a eles que a medida desse ângulo é chamada de inclinação da reta.

Movendo o controle deslizante de a até o ponto 0, e modificando o controle deslizante de b, mostrar aos alunos que qualquer reta paralela ao eixo x possui inclinação zero.

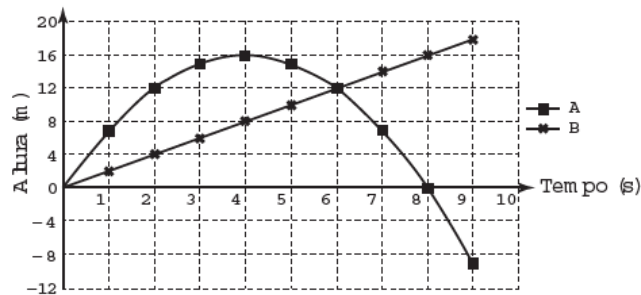
Questionar os alunos sobre o valor de a, que ficará visível na projeção. Perguntar aos alunos se existe relação entre o valor de a e o ângulo dado. Explicar a eles que o valor de a é a tangente do ângulo em cada caso. Fazer alguns exemplos para se certificar de que isso de fato ocorre.

Explicar aos alunos que o valor da tangente se chama coeficiente angular da reta.

**Conceitos:** Seja  $\alpha$  a medida do **ângulo** que uma reta r forma com o eixo x. Essa medida é considerada do eixo x para a reta r, no sentido **anti-horário**, e denomina-se **inclinação** da reta r.



**Problema 1:** Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, quanto deve ser aumentado o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B?

*Solução:*

O coeficiente angular de uma reta é calculado como  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

A trajetória atual do projétil B passa pelos pontos (0,0) e (6,12), portanto:  $a = \frac{12-0}{6-0} \Rightarrow a = 2$

Se alcançar o objetivo, a trajetória irá passar pelos pontos (0,0) e (4,16), portanto:  $a = \frac{16-0}{4-0} \Rightarrow a = 4$

Assim, podemos concluir que o coeficiente angular deve aumentar em duas unidades.

**Conceito:** Conhecendo um ponto  $P(x_0, y_0)$  e a declividade de uma reta r, podemos chegar a uma equação de incógnitas x e y, que será chamada **equação fundamental da reta r**.

Considerando um ponto  $Q(x, y)$  qualquer sobre a reta,  $\tan \alpha = a$ , temos:

$$\tan \alpha = a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow y - y_0 = a(x - x_0).$$

Se escolhermos o ponto  $(0, b)$ , isto é, o ponto que a reta intersecta o eixo y, temos:

$$y - b = a(x - 0)$$

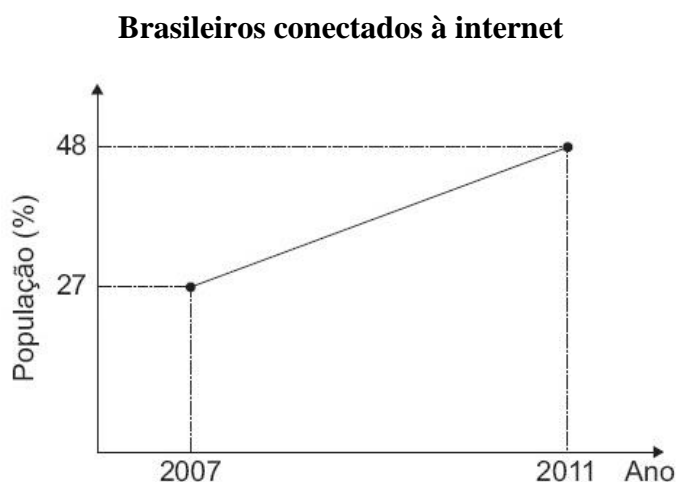
$$\Rightarrow y = ax + b.$$

Essa equação é conhecida como **equação reduzida da reta r**. O número real  $b$  é chamado coeficiente linear da reta, enquanto  $a$  é o coeficiente angular.

**Problema 2:** A Internet no Brasil chega em 1988 por decisão inicial da sociedade de estudantes e professores universitários paulistanos e cariocas. No entanto, somente a partir de 1996, a Internet brasileira passou a ter seus *backbones*, a rede principal pela qual passam os dados de todos os clientes da Internet enviando e recebendo dados entre as cidades brasileiras ou para países de fora. A partir de 2004, com as redes sociais, como o Orkut e posteriormente o Facebook, a Internet começa a se popularizar como uma mídia de massa no Brasil e, a partir de 2007, com o surgimento dos primeiros smartphones e da conexão 3G, passa a estar disponível também em dispositivos móveis.

Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Internet\\_no\\_Brasil](https://pt.wikipedia.org/wiki/Internet_no_Brasil)

O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência é mostrada no gráfico.



Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período de 2007 a 2011. Qual será a estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2019?

*Solução:* Podemos representar essa estimativa por uma reta:

$$a = \frac{48 - 27}{2011 - 2007} \Rightarrow a = \frac{21}{4}$$

Utilizando o ponto (2007, 27) temos

$$27 = 2007 \times \frac{21}{4} + b$$
$$\Rightarrow b = -10509,75$$

Assim uma função  $y = \frac{21}{4}x - 10509,75$ , em que  $x$  é o ano e  $y$  é o respectivo percentual.

Para obter o percentual de 2019 basta substituir o ano na função:

$$y = \frac{21}{4}(2019) - 10509,75$$
$$y = 90$$

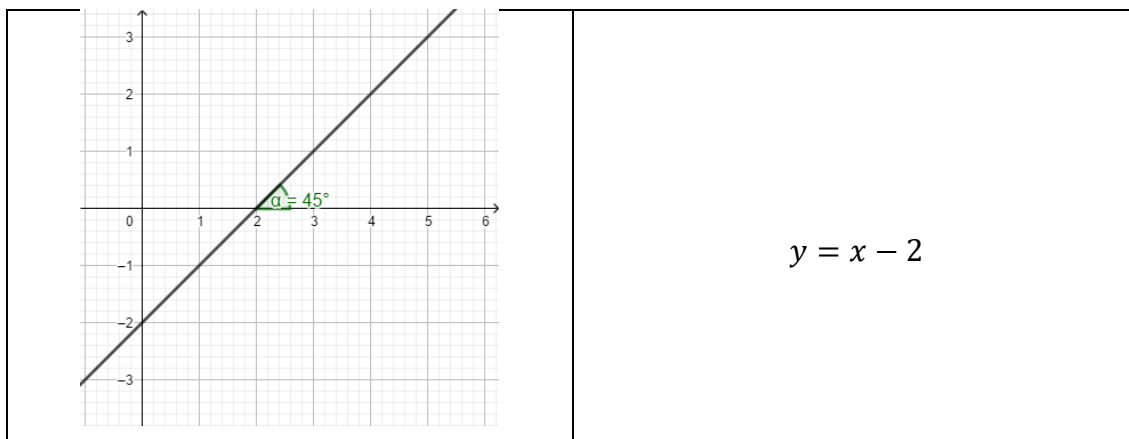
Portanto, a estimativa será de 90%.

Ao final dessa resolução explicaremos que a inclinação da reta é a forma mais comum de taxa de crescimento, inclusive em gráficos onde não há uma reta também é utilizado retas para obter a taxa de crescimento e encontrar pontos de máximo e de mínimo.

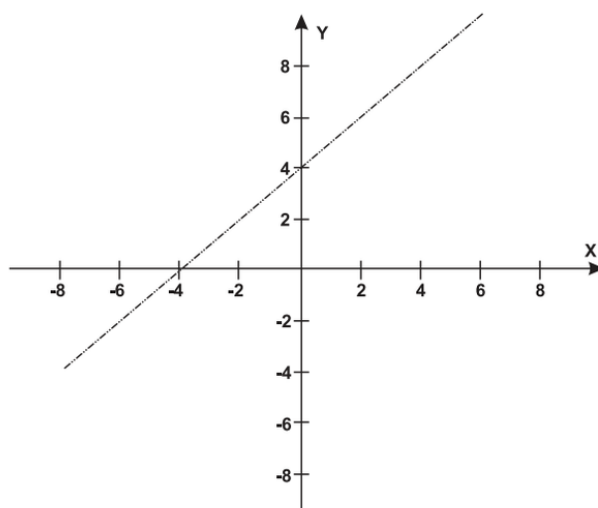
### Jogo:

Organizar os alunos em trios para que joguem o jogo da memória da equação da reta. Cada aluno, em sua vez, deve virar uma carta com um gráfico e outra com uma equação para analisar se formam um par.

Exemplo de par:



**Problema 3:** (ENEM 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



Questão 150 do Enem 2011 (Foto: Reprodução/Enem).

A reta de equação  $y = x + 4$  representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto  $P = (-5, 5)$ , localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

- A  $(-5, 0)$ .
- B  $(-3, 1)$ .
- C  $(-2, 1)$ .
- D  $(0, 4)$ .
- E  $(2, 6)$ .

*Solução:* A estação deve estar sobre a reta, os únicos pontos que pertencem à reta são B $(-3, 1)$ , D $(0, 4)$  e E $(2, 6)$ , porém o único ponto que dista menos de 5 km do ponto  $P = (-5, 5)$  é o ponto B $(-3, 1)$ .

**Problema 4:** Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R\$ 3,45, mais R\$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R\$ 3,60, mais R\$ 1,90 por quilômetro rodado.

Uma pessoa se percebeu que pagará o mesmo preço ao utilizar os dois serviços. Quantos

quilômetros essa pessoa irá percorrer? Quanto será pago?

*Solução:* Para responder essa pergunta queremos saber quando que as funções assumem valores iguais.

Isto pode ser resolvido por um sistema

$$\begin{cases} y = 2,05x + 3,45 \\ y = 1,90x + 3,60 \end{cases}$$

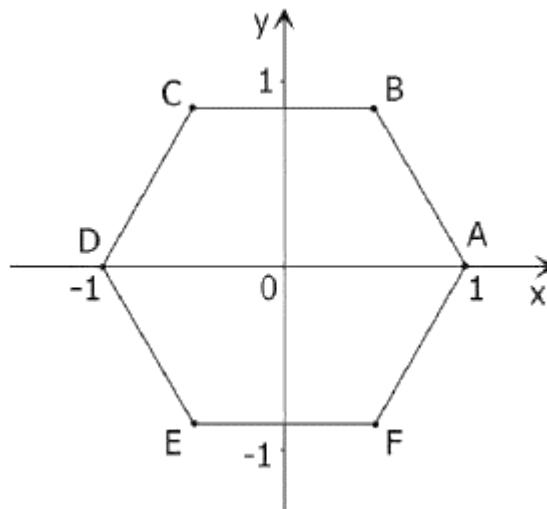
ou simplesmente igualar as funções

$$\begin{aligned} 2,05x + 3,45 &= 1,90x + 3,60 \\ \Rightarrow 0,15x &= 0,15 \\ \Rightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

Em  $y = 1,90x + 3,60$  temos que quando  $x = 1$ ,  $y = 5,5$

Portanto, ao andar 1 km pagará R\$ 5,5 nos dois serviços de taxi.

**Problema 5:** (UFRGS 2017) Os pontos A, B, C, D, E e F determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto A tem coordenadas (1,0) e o ponto D tem coordenadas (-1,0), como na figura abaixo.



Qual é a equação da reta que passa pelos pontos B e D?

*Solução:* Considerando que um hexágono regular é dividido em 6 triângulos equiláteros, sabemos que a coordenada  $x$  do ponto B é 0,5 e obtemos a coordenada  $y$  com o teorema de

Pitágoras:  $1^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$  donde  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Assim, temos as coordenadas dos dois pontos e é possível determinar a reta que passa por eles.

$$a = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{1}{2} - (-1)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

No ponto  $(-1,0)$  temos  $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1) + b \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Portanto, a equação da reta que passa pelos pontos B e D é dada por  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Problema 6:** Uma formiga se desloca o tempo todo num plano, ao longo de uma *retap* que passa pelo ponto  $(1, -2)$  e percorre a menor distância até interceptar a trajetória retilínea de outra formiga nesse mesmo plano, descrita pela equação  $y = 2x + 8$ . Qual é a equação da reta que representa a trajetória da primeira formiga?

*Solução:* Levar os alunos a observar o seguinte: Como a primeira formiga se desloca o tempo todo ao longo de uma reta e percorre a menor distância até a segunda formiga então a trajetória dessas formigas são perpendiculares entre si.

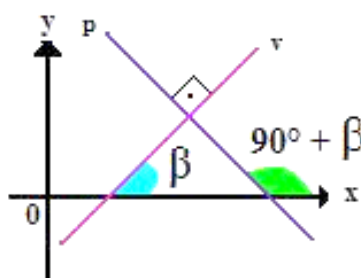
Observe que existem várias retas perpendiculares à reta, que chamaremos *dev*, dada por  $y = 2x + 8$ , mas somente uma que passa pelo ponto  $(1, -2)$ .

Para determinar a equação da *retap* observe que o coeficiente angular da reta deve ser negativo, ou seja, o oposto desse coeficiente. Mas veremos que o coeficiente angular *dep* é também o inverso do coeficiente da *retav*.

Demonstrar o seguinte resultado:

### Retas perpendiculares

Considere duas retas perpendiculares *v* e *p*, veja a representação gráfica dessas duas retas:



O ângulo de inclinação da reta *v* será igual a  $\beta$  e o da reta *p* será  $90^\circ + \beta$ , pois é o ângulo externo



ao triângulo formado pelo ponto de interseção das duas retas com o eixo Ox. Com essas informações podemos dizer que o coeficiente angular da reta  $v$  será  $m_v = \operatorname{tg} \beta$  e o coeficiente da reta  $p$  será  $m_p = \operatorname{tg} (90^\circ + \beta)$ , aplicando as fórmulas de adição de arcos teremos:

$$\operatorname{tg} (90^\circ + \beta) = \frac{\operatorname{sen} (90^\circ + \beta)}{\cos (90^\circ + \beta)}$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ + \beta) = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos 90^\circ}{\cos 90^\circ \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ + \beta) = \frac{\cos \beta}{-\operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ + \beta) = \frac{-1}{\operatorname{tg} \beta}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta  $p$  será:  $m_p = \frac{-1}{\operatorname{tg} \beta}$

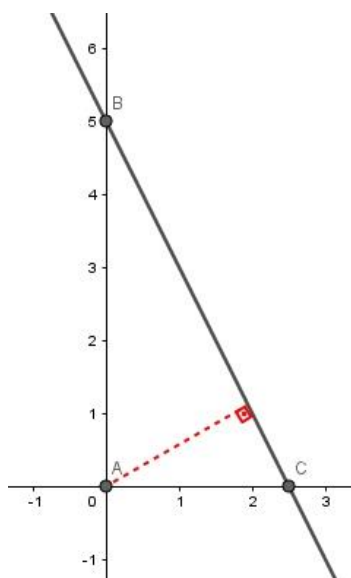
Observe que  $m_v \times m_p = -1$

Também podemos dizer que o coeficiente angular da reta  $p$  é o inverso do oposto do coeficiente angular da reta  $v$ .

Terminar a resolução do problema:

$$R: y = \frac{-1}{2}x - \frac{3}{2}$$

**Problema 7:**



a) Dados os pontos A(0, 0), B(0, 5) e C(2.5, 0) determine equação reduzida e geral da reta. R:

$$y = -2x + 5 \text{ ou } 2x + y - 5 = 0$$

b) Determine a distância entre a reta e a origem.

Solução: Observe que a distância entre um ponto e uma reta deve formar um segmento perpendicular à reta e que este segmento nos dará um ponto da reta. Com este ponto podemos utilizar os conhecimentos sobre distância entre pontos e encontrar a solução do problema.

O segmento perpendicular que passa pela origem pode ser representado por uma reta cujo coeficiente angular deve ser o oposto do inverso do coeficiente angular da reta  $y = -2x + 5$ , neste caso o coeficiente da nova reta deve ser  $a = \frac{1}{2}$  e como essa reta passa pela origem a equação será  $y = \frac{1}{2}x$ . Igualando as duas retas obtemos o ponto de interseção:

$$\frac{1}{2}x = -2x + 5$$

Multiplicando a equação por 2 em ambos os membros temos

$$x = -4x + 10$$

$$\Rightarrow x = 2$$

em  $y = \frac{1}{2}x$  temos a coordenada  $y = 1$ .

Agora basta calcular a distância do ponto (2,1) até a origem

$$d = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

### **Distância entre ponto e origem**

Seja a reta na forma geral,  $r: ax + by + c = 0$ .

Ou também, isolando  $y$  temos a equação reduzida

$$y = \frac{ax}{-b} + \frac{c}{-b}$$

Queremos calcular a distância da reta até a origem. Chamaremos essa distância de  $d$ .

Para isso iremos calcular a equação da retas perpendicular à  $r$  e encontrar o ponto de intersecção entre elas que chamaremos de  $P$ .

E por último, determinamos a distância de  $P$  até a origem.

Para encontrar a equação da reta perpendicular à  $r$  precisamos de uma retas com coeficiente angular que satisfaça  $m_r \times m_s = -1$  e passe pelo ponto  $(0,0)$ .

Como o coeficiente angular de  $r$  é  $m_r = \frac{-a}{b}$  o coeficiente angular de  $s$  deve ser  $m_s = \frac{b}{a}$

E como a retas passa pela origem, o coeficiente linear é igual a 0.

Assim, a equação da retas é dada por  $y = \frac{b}{a}x$ .

A intersecção de  $r$  e  $s$  é a solução do sistema

$$\begin{cases} y = \frac{ax}{-b} + \frac{c}{-b} \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}$$

Ou também podemos igualar as duas equações para descobrir qual é o ponto em comum.

$$\frac{ax}{-b} + \frac{c}{-b} = \frac{b}{a}x$$

Multiplicando a equação por  $ab$  eliminamos os denominadores,

$$(ab)\frac{ax}{-b} + (ab)\frac{c}{-b} = (ab)\frac{b}{a}x$$

$$-a^2x - ac = b^2x$$

Isolando  $x$  obtemos a abscissa do ponto  $P$

$$\begin{aligned} x(-a^2 - b^2) &= ac \\ x &= \frac{-ac}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

E substituindo  $x$  em uma das retas obtemos a ordenada de  $P$

Na reta  $y = \frac{b}{a}x$  temos

$$y = \frac{b}{a} \left( \frac{-ac}{a^2 + b^2} \right)$$

$$y = \frac{-bc}{a^2 + b^2}$$

Calculando a distância entre  $P = \left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$  e  $(0,0)$  temos

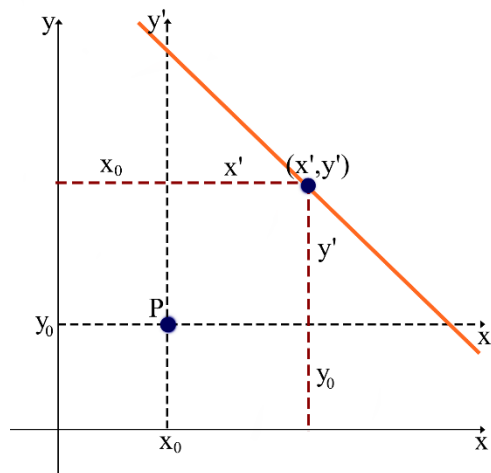
$$d = \sqrt{\left(\frac{-ac}{a^2+b^2} - 0\right)^2 + \left(\frac{-bc}{a^2+b^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{(ac)^2 + (bc)^2}{(a^2+b^2)^2}} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a^2+b^2)^2}} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}} \Rightarrow$$

$$d_{0,r} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Para outros pontos diferentes de  $(0,0)$  basta fazer um ajuste:



Seja o ponto  $P = (x_0, y_0)$  e a reta  $r: ax + by + c = 0$

E substituimos  $x = x_0 + x'$  e  $y = y_0 + y'$  na reta  $r: a(x_0 + x') + b(y_0 + y') + c = 0$

Temos

$$ax_0 + ax' + by_0 + by' + c$$

$$ax' + by' + ax_0 + by_0 + c$$

Comparando com a equação da reta:  $ax + by + c = 0$  vemos que  $c$  é equivalente a  $ax_0 + by_0 + c$  e, da equação já obtida

$$d_{0,r} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Temos a distância entre  $P = (x_0, y_0)$  e a reta é:

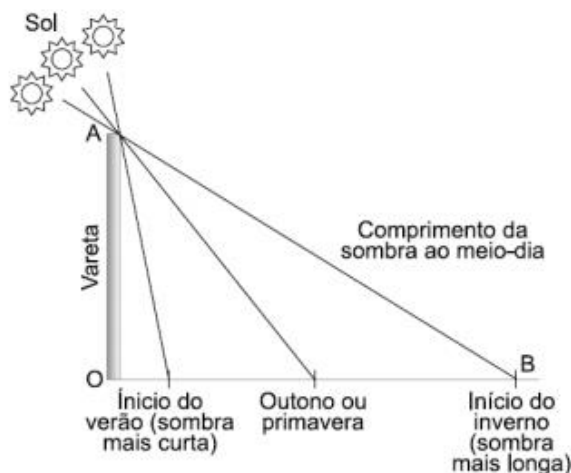
$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercícios complementares:

1) (UEPA) O comandante de um barco resolveu acompanhar a procissão fluvial do Círio, fazendo o percurso em linha reta. Para tanto, fez uso do sistema de eixos cartesianos para melhor orientação. O barco seguiu a direção que forma  $45^\circ$  com o sentido positivo do eixo  $x$ , passando pelo ponto de coordenadas  $(3,5)$ . Este trajeto ficou bem definido através de uma equação. Qual é essa equação?

R:  $y = x + 2$

2) Há mais de 5.000 anos os egípcios observaram que a sombra no chão provocada pela incidência dos raios solares de um gnômon (um tipo de vareta) variava de tamanho e de direção. Com medidas feitas sempre ao meio dia, notaram que a sombra, com o passar dos dias, aumentava de tamanho. Depois de chegar a um comprimento máximo, ela recuava até perto da vareta. As sombras mais longas coincidiam com dias frios. E as mais curtas, com dias quentes. (Adaptado de Revista "Galileu", janeiro de 2001.) (imagem abaixo)



3) Um estudante fez uma experiência semelhante à descrita no texto, utilizando uma vareta OA de 2 metros de comprimento. No início do inverno, mediu o comprimento da sombra OB, encontrando 8 metros.

Utilizou, para representar sua experiência, um sistema de coordenadas cartesianas, no qual o eixo das ordenadas (y) e o eixo das abscissas (x) continham, respectivamente, os segmentos de reta que representavam a vareta e a sombra que ela determinava no chão.

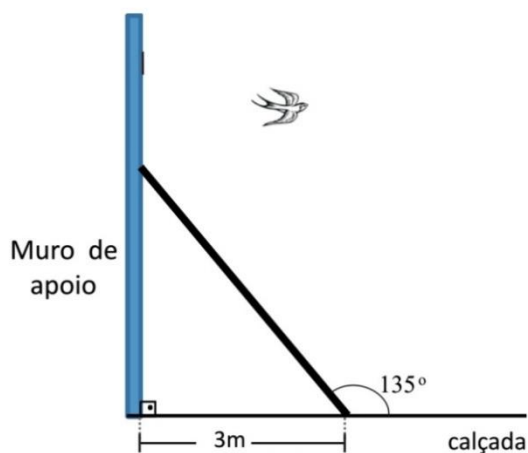
Esse estudante pôde, assim, escrever a seguinte equação da reta que contém o segmento AB:

- a)  $y = 8 - 4x$
- b)  $x = 6 - 3y$
- c)  $x = 8 - 4y$
- d)  $y = 6 - 3x$

4) Um pássaro sobrevoa uma rampa conforme mostra a figura. A ave faz seu voo em linha reta e paralela à calçada.

a) Sabendo-se que a rampa forma um ângulo de  $135^\circ$  com a calçada, conforme mostra a figura, e que a distância do muro de apoio até o pé da rampa é de 3 metros, calcule o comprimento da rampa. R:  $3\sqrt{2}$

b) Determine a menor distância entre o pássaro e a rampa no instante em que o pássaro se encontra a 5 metros do muro e a 6 metros da calçada em que se apoia a rampa. R:  $4\sqrt{2}$ .



<http://www.cops.uel.br/vestibular/2012/provas/MATEMATICA.pdf>

5) (Cesgranrio) As escalas termométricas Celsius e Fahrenheit são obtidas atribuindo-se ao ponto de fusão do gelo, sob pressão de uma atmosfera, os valores 0 (Celsius) e 32 (Fahrenheit)

e à temperatura de ebulição da água, sob pressão de uma atmosfera, os valores 100 (Celsius) e 212 (Fahrenheit). O gráfico que representa a temperatura Fahrenheit em função da temperatura Celsius é uma reta de coeficiente angular igual a:

- a) 0,6
- b) 0,9
- c) 1
- d) 1,5
- e) 1,8

### 3.6.2 Referências

PROBLEMAS DE DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA. Disponível em:<http://www.cops.uel.br/vestibular/2012/provas/MATEMATICA.pdf> Acesso em 24 ago 2018.

RETAS PERPENDICULARES. Disponível em:<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/retas-perpendiculares.htm> Acesso em 24 ago 2018.

### 3.6.3 Relatório – 15/09/2018

No dia quinze de setembro de 2018, realizamos a segunda aula sobre o conteúdo de geometria analítica, abordando o estudo das retas. Neste dia compareceram apenas doze alunos, pois a maioria deles que moram em outras cidades não puderam vir devido a segunda fase da olimpíada de matemática que seria realizada no período da tarde.

Primeiramente perguntamos aos alunos se eles saberiam explicar o que é uma reta, mas como nenhum deles conseguiu responder, perguntamos quantos pontos determinavam uma reta e um aluno disse que eram vários, concordamos com o aluno e perguntamos quantas retas passam por dois pontos A e B dados, explicando que somente uma reta poderia passar por esses dois pontos. Assim, concluímos que uma reta é formada por infinitos pontos formando uma linha infinita, mas que definimos por dois pontos distintos. Também explicamos que representamos uma reta por um segmento, pois não é possível desenhar uma reta devido às limitações de espaço.

Entregamos os materiais aos alunos para que preenchessem as palavras cruzadas, a fim

de que nós pudéssemos identificar o que eles já sabiam sobre retas. A maioria dos alunos conseguiu responder uma palavra, que foi a palavra ângulo. Como vimos a dificuldade deles, resolvemos logo explicar os conceitos, acompanhando a cruzadinha e mostrando a projeção de retas, na qual mudávamos os coeficientes para que eles pudessem visualizar os ângulos e relacionar com o coeficiente angular, que é a tangente do ângulo e, em seguida, introduzimos como é calculado o coeficiente angular de uma reta que é dado pela divisão da variação de  $y$  pela variação de  $x$ , também associada respectivamente com seno e o cosseno do ângulo dessa reta.

Realizamos a leitura do primeiro problema, fizemos a interpretação e explicamos o que os alunos deveriam fazer para resolver o problema. Ao acompanhar a resolução dos alunos, percebemos que eles se limitaram a pensar somente na fórmula para resolver o problema. Para isso foi necessário explicar o sentido da fórmula, que no problema foi ver a variação da distância e do tempo, em que a inclinação da reta era o quociente da divisão da distância pelo tempo. Após a maioria dos alunos terminarem de resolver o problema, resolvemos no quadro e introduzimos as equações geral e reduzida da reta a partir do coeficiente angular.

No terceiro problema os alunos tiveram dificuldade novamente para determinar o coeficiente angular, pois a reta não passava pela origem e, com isso, as variações de  $y$  e de  $x$  necessitavam de uma subtração das coordenadas dos pontos encontrados. Depois disso, outra dificuldade foi encontrar a equação da reta sabendo sua inclinação, pois os alunos não sabiam que poderiam substituir um ponto da reta para determinar a sua posição. Esse problema foi um pouco difícil para os alunos, pois a equação da reta não era tão simples, assim os alunos não conseguiam ter muitas intuições, mas fizemos outra solução para o problema, na qual bastava ver a existência de uma proporcionalidade no crescimento e logo era possível calcular o resultado utilizando uma regra de três.

Após o intervalo, reunimos os alunos em duplas para disputar o jogo da equação da reta. Nesse jogo, as regras são as mesmas do jogo de memória tradicional em que cada par é formado por uma equação e o respectivo gráfico. Haviam onze alunos e assim, um dos estagiários jogou com um dos alunos, enquanto os outros auxiliavam as demais duplas. Os alunos tiveram mais dificuldades do que o esperado, pois vários deles não conseguiam identificar o coeficiente angular e até mesmo o coeficiente linear. As equações mais difíceis eram  $y=0$  e  $x=0$ , assim explicamos que o coeficiente angular da reta  $y=0$  é zero e que a equação poderia ser encontrada da forma  $y=0x+0$ , pois como a reta intercepta o eixo  $y$  em zero o coeficiente linear também é zero.



Quando a maioria dos alunos terminaram uma partida do jogo, prosseguimos para o restante das atividades. O problema seguinte exigiu a noção de que um ponto de parada de um metro não poderá estar fora de seu trajeto. Os alunos tiveram dificuldade para saber se um ponto pertence a uma reta dada usando a equação dessa reta, mas a figura serviu bem para auxiliá-los e, com nossa ajuda, os alunos conseguiram resolver o problema.

O último problema resolvido foi o qual se tinha a intersecção de duas retas. Alguns alunos resolveram por tentativa e como a aula já estava se encerrando não deixamos muito tempo para os alunos pensarem, então, por meio de perguntas resolvemos coletivamente. Os alunos ditaram a equação das retas, assim, propomos uma forma de resolver o sistema igualando as equações reduzindo o problema a uma equação do primeiro grau, explicamos qual era o significado daquela igualdade e da solução encontrada para a primeira variável e que ao substituir a solução encontrada em qualquer uma das retas, iriam encontrar a outra informação pedida no problema. Em seguida, mostramos no *GeoGebra* a intersecção entre as retas e variando o zoom para que os alunos visualizassem o ponto de intersecção.

Conversamos com os alunos para que realizassem a lista complementar e que poderiam pedir ajuda para esclarecer as dúvidas e, assim, encerramos a aula.

### **3.7 Plano de aula - 22/09/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Geometria analítica, circunferência.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos reconheçam a equação de uma circunferência em seus vários formatos, e compreendam as posições relativas entre circunferências e retas, pontos e outras circunferências.

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja

capaz de:

- Obter a equação geral de uma circunferência e relacionar a equação com o gráfico;
- Relacionar a equação reduzida da circunferência com a equação geral;
- Compreender as posições relativas entre um ponto e uma circunferência;
- Compreender as posições relativas entre uma reta e uma circunferência.
- Compreender as posições relativas entre duas circunferências.
- Interpretar e resolver problemas envolvendo conceitos de geometria analítica na circunferência.

**Recursos Didáticos:** Quadro, giz, jogo da memória, data show.

### **Encaminhamento Metodológico**

Iniciar a aula explicando que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que estão a mesma distância do centro. Reforçar que a circunferência é formada apenas pelos pontos do “contorno”, e não pelos pontos interiores a circunferência.

Relembrar os conceitos de centro e raio de uma circunferência, e em seguida passar para o problema 1.

**Problema 1:** Representando a imagem abaixo em um sistema de coordenadas cartesianas, graduado em metros, temos que o centro da roda gigante é o ponto  $C(2,3)$ , e que a distância entre esse ponto e qualquer uma das extremidades da roda gigante é de 5 metros. Escreva uma equação que permita relacionar essa distância com o centro da roda gigante.



*Solução:*

Sabemos que a distância entre dois pontos C e P é dada por

$$D = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$

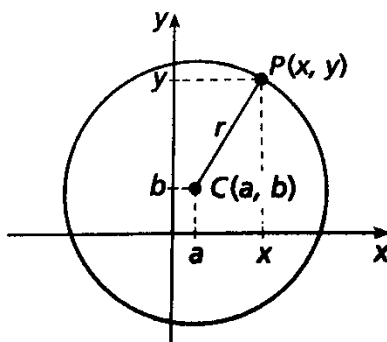
$$5 = \sqrt{(X - 2)^2 + (Y - 3)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$$25 = (X - 2)^2 + (Y - 3)^2$$

Explicar aos alunos que essa fórmula é simplesmente a fórmula da distância, estipulando uma distância fixa, que nesse caso, é de 5 metros. Assim, os pontos que cumprem a condição acima, são todos os pontos da circunferência formada pelo arco exterior da roda gigante. Em seguida, construir a generalização da equação da circunferência através de problema 2.

**Problema 2:** Determine o raio  $r$  da circunferência centrada no ponto  $C(a,b)$ , sabendo que  $P(x,y)$  é um ponto dessa circunferência.



Após a resolução deste problema, formalizar a equação reduzida da circunferência, e mostrar a seguinte animação do GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/tqJzpVj2>

**Conceito:** A equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

é conhecida como equação reduzida da circunferência de centro  $C(a,b)$  e raio  $r$ .

**Problema 3 (IBFC – 2016):** Uma reta  $r$  passa pelo ponto  $P(3,2)$  e pelo ponto que representa o centro da circunferência de equação  $(x-2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ . Nessas condições, qual é a equação da reta  $r$ ?

*Solução:*

Note que temos uma equação da forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

com  $a=2$ ,  $b=-3$  e  $r=3$ . Assim, trata-se de uma circunferência de raio 3, cujo centro é o ponto  $(a,b)=(2,-3)$ .

Portanto, precisamos encontrar a equação da reta que passa pelos pontos  $P(3,2)$  e  $C(2,-3)$ .

Queremos uma equação da forma  $y = ax + b$ . Sabemos que  $a = \frac{-3-2}{2-3} = 5$ .

Assim, a equação é da forma  $y = 5x + b$ . Resta descobrir o valor do coeficiente  $b$ . Para isso, vamos usar o ponto  $P(3,2)$  que pertence a reta. Temos

$$2 = 5 \cdot 3 + b$$

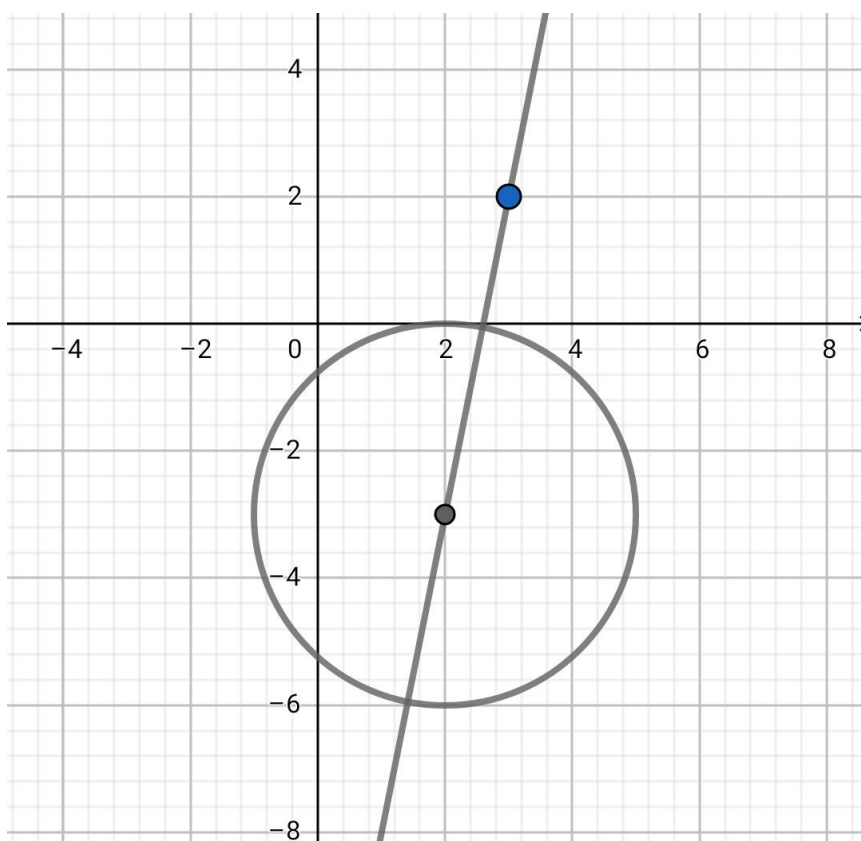
$$2 - 15 = b$$

$$b = -13.$$

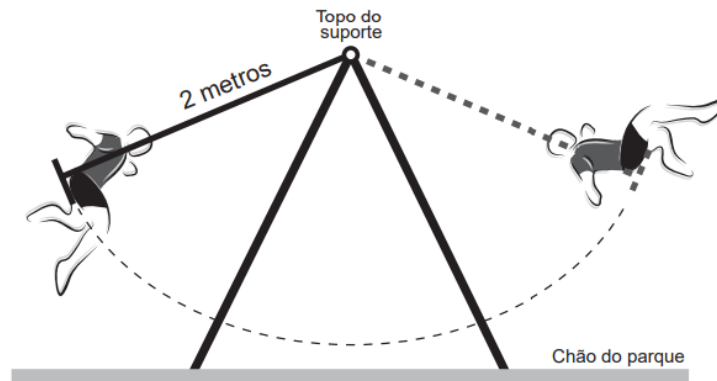
E portanto, a equação da reta é

$$y = 5x - 13.$$

É possível ainda verificar a resolução deste exercício através da construção da circunferência e da reta no GeoGebra, mostrando que a reta encontrada atende as condições do problema



**Problema 4 (Enem – 2014):** A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico de que função?

a)  $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

b)  $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

c)  $f(x) = x^2 - 2$

d)  $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

e)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

*Solução:*

Vamos determinar a equação da circunferência da qual a trajetória do balanço faz parte.

Como o centro da circunferência é o ponto (0,0), temos

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

$$(x)^2 + (y)^2 = 4.$$

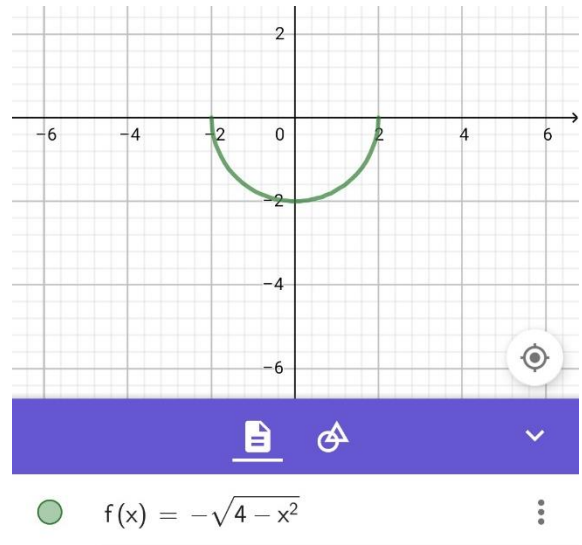
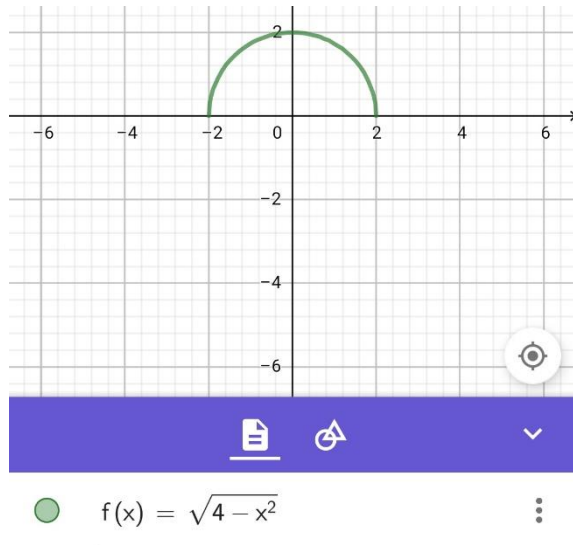
Fazendo  $f(x) = y$ , e isolando y temos:

$$x^2 + f(x)^2 = 4$$

$$f(x)^2 = 4 - x^2$$

$$f(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Note que, para cada caso, temos uma função, que é metade da circunferência de raio 2.



E assim, a trajetória do balanço faz parte da função

$$f(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

**Problema 5 (IBFC – 2017):** A equação da circunferência da base de um cilindro é dada por  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ , com medidas em cm. Se a altura do prisma é igual a 10 cm, então qual é a medida da área do retângulo que forma esse prisma? (Considere  $\pi = 3$ ).

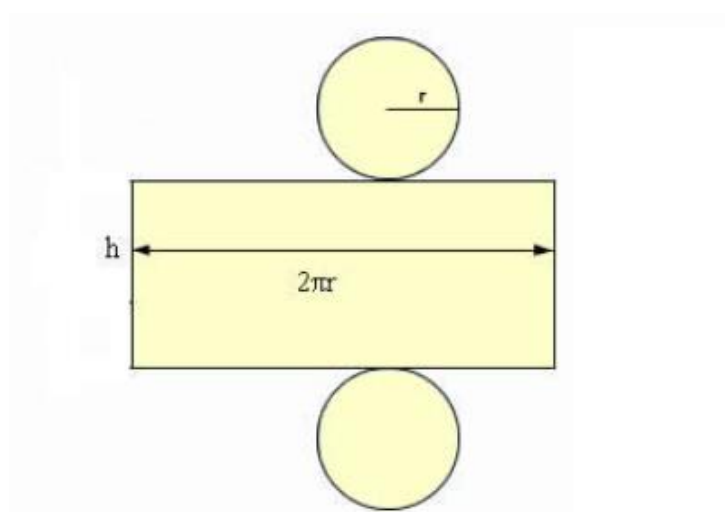
Solução:

Note que temos uma equação da forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

com  $a=2$ ,  $b=3$  e  $r=4$ .

Se necessário, mostrar aos alunos a planificação do prisma, para que compreendam que a medida da base do retângulo é dada pelo comprimento da circunferência da base.



Assim, usando  $\pi = 3$ , e sabendo que o raio da circunferência é 4, então

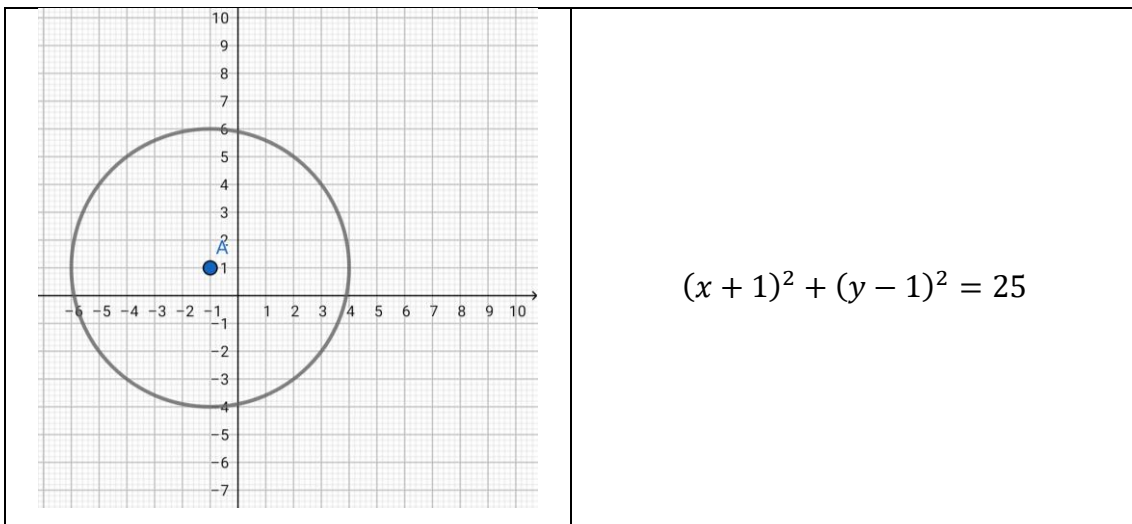
$$2\pi r = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

Assim, a área do retângulo é

$$24 \times 10 = 240cm.$$

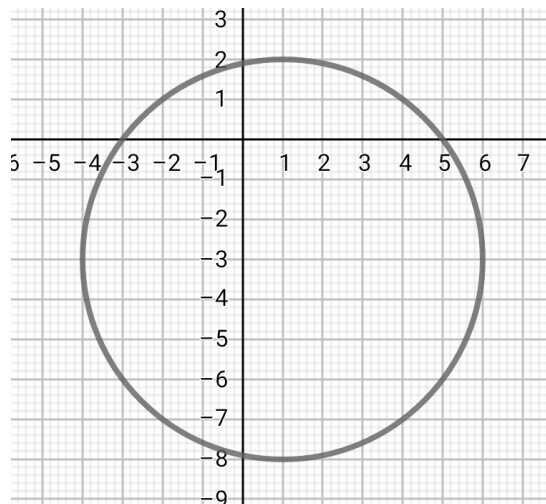
Para fixação do conteúdo, jogar o jogo da memória, em que os pares são formados por uma carta que contém o gráfico da circunferência, e outra carta a equação dessa circunferência.

Exemplo de par:



Após o jogo, passar para o problema 5, cuja ideia é introduzir a equação geral da reta.

**Problema 6:** A equação  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$  representa uma circunferência? Por que? Caso seja uma circunferência, qual o centro e o raio da mesma?



Caso os alunos concluam que não se trata de uma circunferência, devido a equação dada, que não é da forma conhecido por eles, digitar esta equação no campo de entrada no GeoGebra, e mostrar aos alunos que nesse caso é gerada uma circunferência.

Mostrar que ao manipular a equação geral, chegamos a uma equação parecida com a equação dada nesse problema, e que dessa forma podemos manipular a equação para encontrar os valores de “a” e “b” que tínhamos na equação reduzida.

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 &= r^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xa \pm 2yb + a^2 + b^2 - r^2 &= 0 \text{ Fazendo } a^2 + b^2 - r^2 = c, \text{ temos} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax \pm 2by + c = 0$$

Logo, na equação dada, para encontrar os coeficientes a e b, basta separar a equação em duas partes, uma parte em função de x, e outra em função de y, e montar o trinômio quadrado perfeito para cada caso:

$$\left( |2 - 2x + a^2 \right) + (y^2 + 6y + b^2) = 15 + a^2 + b^2$$

Comparando essa equação com a equação geral da circunferência, temos que  $-2ax = -2x \Rightarrow a = 1$ , e também  $-2yb = 6y \Rightarrow b = -3$ , e portanto temos a equação

$$\begin{aligned} \left( |2 - 2x + 1^2 \right) + (y^2 + 6y + (-3)^2) &= 15 + 1^2 + (-3)^2 \\ \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Logo, o centro da circunferência é o ponto C(1,-3), e o raio é 5.

Em seguida, trabalhar com as posições relativas, primeiro entre um ponto e uma circunferência, depois entre uma reta e uma circunferência, e finalmente, entre duas circunferências. Para isso, será feito o uso do GeoGebra para facilitar a visualização dos conceitos. **(Sugestão:** <https://www.geogebra.org/m/fWS6zVzm#material/EZjhBr52> )



**Problema 7 (ENEM 2013)**

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

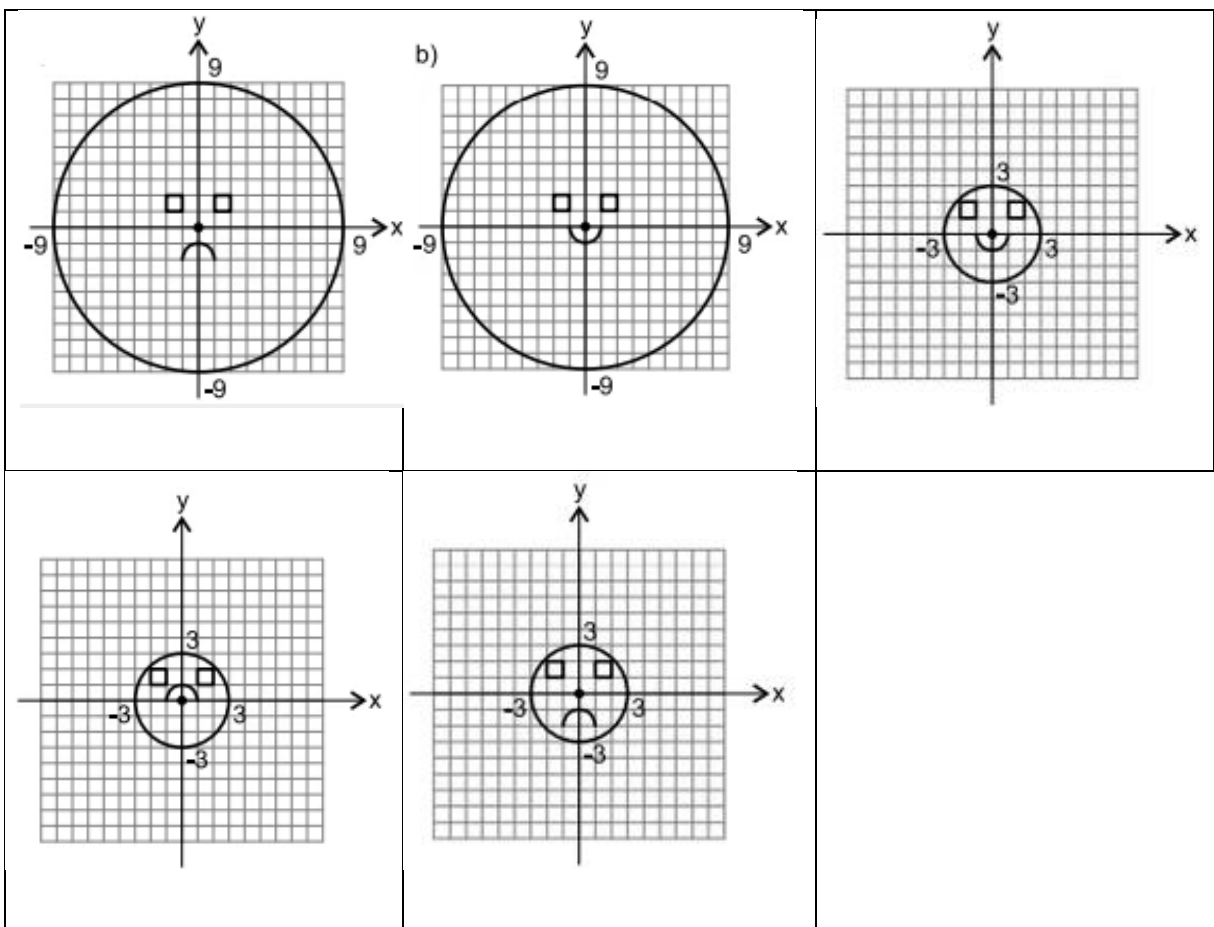
I – é a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 9$ ;

II – é a parábola de equação  $y = -x - 1$ , com  $x$  variando de  $-1$  a  $1$ ;

III – é o quadrado formado pelos vértices  $(-2, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, 2)$  e  $(-2, 2)$ ;

IV – é o quadrado formado pelos vértices  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  e  $(1, 2)$ ; V – é o ponto  $(0, 0)$ .

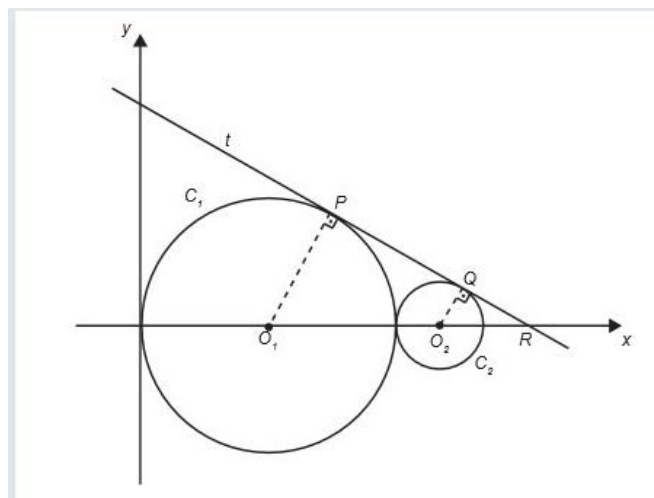
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?



**Problema 9 (CESPE – 2018) :** Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $xOy$ , as retas  $3x+4y+9=0$  e  $3x+4y+11=0$  são tangentes a uma mesma circunferência. Nessa situação, o raio dessa circunferência é igual a

**Problema 10 (Enem – 2016):** Nas figuras estão representadas, em um plano cartesiano, duas

circunferência:  $C_1$  ( de raio 3 e centro  $O_1$  ) e  $C_2$  ( de raio 1 e centro  $O_2$  ), tangentes entre si, e uma reta  $t$  tangente às duas circunferências nos pontos  $P$  e  $Q$ .



Nessas condições, a equação da reta  $t$  é:

### 3.7.2 Referências

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Inep. Disponível em: <[www.inep.gov.br/](http://www.inep.gov.br/)>. Acesso em: 04 ago. 2018.

### 3.7.3 Relatório – 22/09/2018

No dia 22 de setembro de 2018, realizamos o 6º encontro do PROMAT, na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Neste dia trabalhamos com conceitos da geometria analítica voltados ao estudo da circunferência.

Iniciamos a aula com um problema simples, envolvendo o raio de uma roda gigante, para que os alunos pudessem compreender a ideia de circunferência como o lugar geométrico de todos os pontos, cuja distância até um determinado ponto (chamado de centro da circunferência) é a mesma.

Através disso, deduzimos com os alunos a equação reduzida de uma circunferência, uma vez que ela é exatamente a fórmula da distância entre pontos, escrita de outra forma. Reforçamos assim a relação existente entre a equação da circunferência e seu gráfico, identificando o centro e raio da circunferência pela equação.

Após isso, utilizamos o problema 3 para conectar os conceitos da aula anterior, sobre

retas, com os conceitos desta aula. Apesar de apresentar uma certa dificuldade para recordar o método de equacionar uma reta, com auxílio dos professores os alunos puderam chegar no resultado esperado.

Trabalhamos também a ideia de separar a circunferência em duas partes, que definem duas funções, através do problema 4. Nessa questão foram dadas as alternativas, de modo que os alunos conseguiram encontrar a equação da circunferência, mas tiveram dificuldade em identificar qual era lei de formação relacionado ao “pedaço” em questão da circunferência. A construção do gráfico dessas funções no GeoGebra serviu para que os alunos visualizassem melhor a situação, compreendendo a diferença entre as alternativas dadas.

Após isso, pedimos aos alunos que se organizassem em duplas para que pudessem jogar o “Jogo da memória da equação da circunferência”, cuja ideia é semelhante à do jogo utilizado na quarta aula, com a equação da reta e seu respectivo gráfico. Neste jogo, a ideia era formar os pares, sendo que uma das cartas era a equação reduzida da circunferência e a outra, seu respectivo gráfico. Tal atividade serviu para reforçar a relação existente entre a equação e seu gráfico. Percebemos, nesta atividade, o interesse dos alunos e a forma como foram aprimorando seu raciocínio e estratégias de jogo. Ao final, demonstraram domínio e compreensão sobre aquilo que queríamos ensinar.

Após o jogo da memória, apresentamos aos alunos uma equação de circunferência na forma geral e questionamos se essa equação representava ou não uma circunferência. Como esperávamos, os alunos responderam que não, pois esta equação era diferente daquelas com que estávamos trabalhando até o momento. Através do GeoGebra pudemos mostrar aos alunos que se tratava de fato de uma circunferência.

Trabalhamos com esta equação no quadro, juntamente com os alunos, para deixá-la na forma da equação reduzida, nos permitindo assim indicar o centro e o raio da circunferência. Para isso, utilizamos o completamento de quadrado. Apesar dos alunos aparentemente terem compreendido o passo a passo desta atividade, acredito que em um primeiro momento não conseguiriam fazer o mesmo procedimento com outra equação dada, o que também não foi possível trabalhar com mais calma devido ao tempo curto.

Em geral, apesar da amplitude dos conceitos abordados, concluímos que os alunos compreenderam com careza pelo menos os conceitos iniciais, que servem de base para aprofundamento, caso os alunos tenham interesse.

### 3.8 Plano de aula - 29/09/2018

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL, inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Análise combinatória.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos compreendam o princípio fundamental da contagem e sejam capazes de resolver problemas que necessitam do conhecimento de permutações (simples, com repetição e circular).

**Objetivos Específicos:** Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender o princípio fundamental da contagem e o conceito de permutação;
- Compreender os diferentes tipos de permutação: simples, com repetição e circular;
- Distinguir as características de cada permutação;
- Interpretar e resolver problemas envolvendo princípio fundamental da contagem e permutações.

**Recursos Didáticos:** Quadro, giz.

#### Encaminhamento Metodológico

**Problema 1:** Três companhias de ônibus e 2 companhias de aviação cobrem o percurso entre as cidades A e B. De quantos modos diferentes podemos viajar entre essas duas cidades utilizando esses meios de transporte?

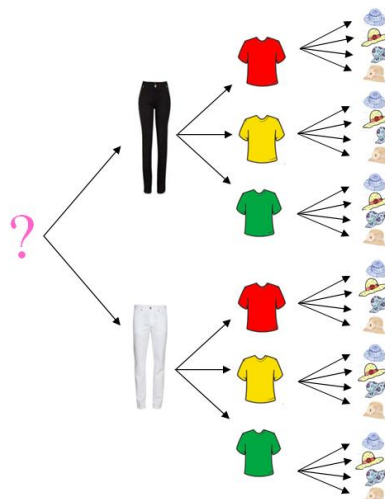
*Solução:* A forma que escolhermos de viajar, ônibus ou avião, independe uma da outra. Isto é, viajar de ônibus ou avião é uma opção, não interferindo uma escolha na outra. Então, para irmos de A até B, podemos optar por: 3 maneiras diferentes, se formos de ônibus, ou 2 maneiras diferentes, se formos de avião. Logo, pelo Princípio da Regra da Soma, o total de possibilidades

existentes para ir de A até B é  $3 + 2 = 5$ .

• **Regra da Soma:** Se um acontecimento A pode ocorrer de  $m$  maneiras e um acontecimento B pode ocorrer de  $n$  maneiras, então existem  $m + n$  modos de ocorrer **um** destes acontecimentos.

**Problema 2:** Fernanda está com a mala quase pronta para ir viajar, porém ainda está indecisa para escolher uma calça, uma camiseta e um chapéu. Sabendo-se que Fernanda tem duas calças, três camisetas e quatro chapéus, de quantas formas diferentes ela poderá escolher o que levar em sua viagem?

*Solução:* Como Fernanda tem duas calças, para cada calça que irá escolher ela terá três opções de camiseta para combinar e para cada combinação de calça e camiseta terá 4 chapéus para escolher. Fazendo a árvore das possibilidades podemos contar todas as possibilidades:



Árvore de possibilidades. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/pfc-generalizacao/>

Ou também podemos simplesmente fazer  $2 \times 3 \times 4 = 24$  possibilidades de escolha.

• **Regra do produto:** Se A pode ocorrer de  $m$  maneiras e B pode ocorrer de  $n$  maneiras, então existem  $n \times m$  modos de ocorrerem **ambos** os acontecimentos.

**Problema 3:** Quatro pessoas chegaram ao mesmo tempo em uma agência bancária que possui apenas um atendente. De quantas maneiras podemos formar uma fila entre eles, determinando assim a ordem em que eles serão atendidos?

*Solução:* Veja que, para organizar a fila, precisaremos fazer quatro escolhas. De fato, devemos escolher quem será a primeira, a segunda, a terceira e a quarta pessoa da fila. Podemos tomar

essas decisões uma a uma, na ordem indicada. Vejamos: o primeiro da fila pode ser uma qualquer das quatro pessoas, logo há 4 possibilidades para a escolha deste; o segundo da fila deve ser alguém diferente do primeiro (que já foi escolhido) e, portanto, há 3 possibilidades para sua escolha; o terceiro deve ser diferente dos dois primeiros, de forma que ainda há 2 candidatos para essa posição; finalmente, tendo escolhido os três primeiros, resta apenas uma pessoa e, nessas condições, há apenas 1 maneira de escolhermos o quarto da fila. Pelo PFC, o número total de maneiras de formar a fila é igual a  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ .

**Fatorial:** Dado um número natural  $n$ , o produto de todos os naturais de 1 até  $n$  é chamado de fatorial de  $n$  e é representado, em símbolos, por  $n!$  (onde se lê n-fatorial). Assim, temos  $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$ . Além disso, por convenção, definimos  $0! = 1$ .

#### PERMUTAÇÃO SIMPLES (sem repetição)

Sejam  $n$  os objetos distintos do conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ , é possível permutá-los (ordená-los) de  $n!$  modos distintos.

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

**Problema 4:** Quantos são os números de três algarismos?

*Solução:* Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda (isto é importante, como veremos abaixo). O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois **não pode ser igual a 0**. O segundo algarismo pode ser escolhido de 10 modos e o terceiro algarismo pode ser escolhido de 10 modos. A resposta é  $9 \times 10 \times 10 = 900$ .

Logo, são 900 números de 100 a 999.

**Problema 5:** Quantos são os números de três algarismos distintos?

*Solução:* Vamos escolher, sucessivamente, os três algarismos, começando com o da esquerda. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois **não pode ser igual a 0**. O segundo algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo algarismo. A resposta é  $9 \times 9 \times 8 = 648$ .

**Problema 6:** Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

*Solução:* Agora temos três restrições: 1º algarismo não pode ser 0, não há repetição de números, último nº deve ser par.

Ordem do algarismo do nº que termina com 0	1º	2º	0
Contagem	9	8	1

→  $9 \times 8 \times 1 = 72$  números

Ordem do algar. do nº que não termina em 0	1º	2º	3º
Contagem	8	8	4

→  $8 \times 8 \times 4 = 256$  números

} soma

---

$256 + 72 = 328$  números

Conforme o quadro, uma estratégia para resolver esse problema é separar em dois casos: o primeiro caso utilizando o algarismo zero na terceira ordem e no segundo caso contar os casos dos outros números pares (2, 4, 6 e 8).

No primeiro caso, o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos, pois o zero, além de não poder ocupar a primeira ordem já foi utilizado para ocupar a terceira ordem. O segundo algarismo não poderá ser igual a zero e nem igual ao algarismo escolhido para a primeira ordem, logo temos 8 maneiras de escolher o segundo algarismo. E o último temos uma possibilidade, que será o zero. Portanto temos  $9 \times 8 \times 1 = 72$  números.

No segundo caso, para o primeiro algarismo teremos 8 modos de escolha, pois não poderá ser zero, nem igual ao número par já utilizado no último algarismo. O segundo número deve ser diferente do algarismo já utilizado na primeira e na terceira ordem, logo terá 8 modos de escolha. E para o último algarismo temos apenas os seguintes algarismos 2, 4, 6 e 8, logo são quatro modos de escolha. Portanto  $8 \times 8 \times 4 = 256$  números.

E, por último, devemos somar os dois casos:  $72 + 256 = 328$  números.

**Problema 7:** Quantos números naturais com 3 algarismos podemos formar, desde que não comecem com 16 e nem com 17?

*Solução:* Nesse problema podemos fazer a contagem de todos os casos e retirar dessa contagem o complementar da restrição:  $900 - (10 + 10) = 880$

**Problema 8:** (Questão 9 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005): Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

*Solução:* Para formar o número de um dos bilhetes comprados por Marcelo, inicialmente deve-se decidir como dispor o algarismo sete no número. Há 4 maneiras de tomar essa decisão, pois o número do bilhete é de uma das seguintes formas:  $777X$ ,  $77X7$ ,  $7X77$  ou  $X777$ , sendo que  $X$  representa um algarismo diferente de zero e 7. Uma vez tomada essa primeira decisão, deve-se, afinal, tomar a decisão de escolher o algarismo restante. Essa última decisão pode ser tomada de 8 maneiras, uma vez que o algarismo restante deve ser diferente de zero e 7. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de bilhetes comprados por Marcelo é  $8 \times 4 = 32$ .

**Problema 9:** Quantos números diferentes com 10 algarismos podem ser escritos usando-se apenas os algarismos 1 e 2?

*Solução:* O primeiro algarismo do número pode ser 1 ou 2, o que nos dá duas possibilidades. Para cada escolha do primeiro algarismo, existem duas escolhas para o segundo, e assim por diante. Então, há  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$  desses números.

**Problema 10:** Uma mangueira tem dez mangas de diferentes tamanhos. De quantas maneiras podemos colher diversas delas?

*Solução:* Neste item, não importa a ordem em que são colhidas as mangas, só quais mangas são retiradas. Podemos tornar este problema semelhante ao anterior. Podemos colher ou não cada manga. Vamos escrever cada maneira de colher as mangas como uma sequência de dez algarismos, com cada algarismo associado a uma das mangas. O algarismo será 1 se a manga associada for colhida e será 2 se ela não for colhida. Assim, cada maneira de colher as mangas corresponderá a um número de dez algarismos formado apenas com os algarismos 1 e 2, e cada um desses números corresponderá a um modo de colher as mangas. O único caso excepcional é  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ , que corresponde a não retirar manga alguma. Portanto, o número de maneiras de colher diversas mangas é 1 a menos do que a quantidade de números de dez algarismos formado apenas com os algarismos 1 e 2. Isso nos dá  $1024 - 1 = 1023$  maneiras de colher de uma a dez mangas.



**Problema 11:** Quantos anagramas podem ser formados com a palavra BRASIL?

*Solução:* Nos anagramas devemos ordenar todas as letras. A palavra BRASIL tem cinco letras das quais nenhuma se repete. Temos cinco opções para a primeira letra, quatro para a segunda, três para a terceira, duas para a quarta e uma para a quinta letra do nosso anagrama. Logo serão  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  anagramas.

**Problema 12:** Quantos anagramas podem ser formados pela palavra ARARA?

*Solução:* Observe que agora temos letras repetidas e que a permutação dada por  $5!$  conta várias vezes o mesmo anagrama. Logo, devemos retirar repetições para cada permutação da palavra ARARA.

(ARARA ARARA ARARA ARARA ARARA ARARA)  $\times$  (ARARA ARARA)

Note que para cada repetição de letra A temos duas repetições de letra R, portanto são doze palavras iguais.

Então são doze palavras iguais para cada uma das permutações a seguir:

ARARA, AAARR, AARRA, ARRAA, RRAAA, RAAAR, RARAA, RAARA, ARAAR, AARAR.

Portanto na palavra ARARA  $\frac{5!}{3! \times 2!}$  10 anagramas.

### PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Sejam o número de objetos que queremos ordenar,  $K$  o  $n^\circ$  de objetos em que se tem repetição,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  é o  $n^\circ$  de vezes que cada um dos  $k$  objetos aparecem repetidos respectivamente. O número de permutações distintas será dado por:

$$PR_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}$$

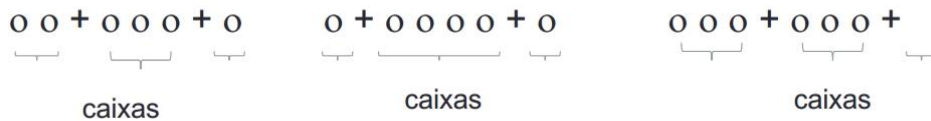
**Problema 13:** Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6?$$

*Solução:* Podemos ver esse problema como equivalente a distribuir 6 bolas em 3 caixas distintas, em que:

○ : bolinha      + : separador das caixas

Alguns exemplos de sequências:



Sequência ordenada de 8 itens, sendo a bolinha repetida 6 vezes e o + repetido 2 vezes.

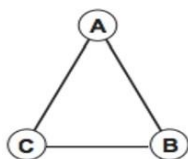
$$PR_{8}^{6,2} = \frac{8!}{6! \times 2!} = 28$$

Portanto, a equação tem 28 soluções.

**Problema 14:** Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um triângulo equilátero com pedras nos seus vértices.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B e C correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

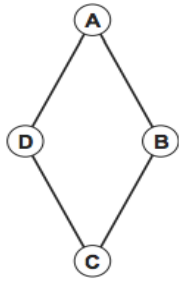


a) Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

*Solução:* Considerando que joias simétricas por rotação são iguais temos somente duas possibilidades.

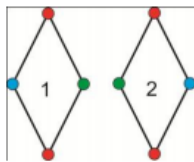
b) Suponha agora que o artesão queira produzir joias de mesmas cores de pedras com o formato de um losango não quadrado, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras

de cores diferentes. Quantas joias diferentes ele irá obter?



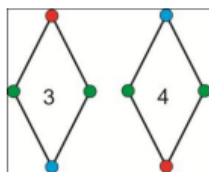
*Solução:* 1) Considera-se que as pedras colocadas nas posições A e C sejam iguais e nas posições B e D sejam diferentes: Existem 3 cores para a posição A, escolhida a pedra para esta posição, existe apenas 1 cor para a posição C, 2 para a posição B e 1 para a posição D. Logo, seriam  $3 \times 1 \times 2 \times 1 = 6$  modos diferentes do artesão dispor as pedras.

Mas fazendo isso temos que observar que estamos contando duas vezes a mesma peça, pois não importa a ordem das pedras B e D, assim na verdade são  $(6 \div 2) = 3$  peças.

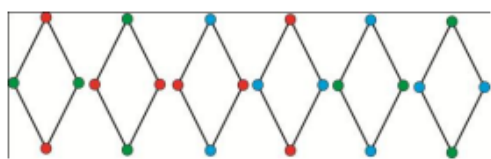


2) Considera-se que as pedras colocadas nas posições A e C sejam diferentes e nas posições B e D sejam iguais: Existem 3 cores para a posição A, escolhida a pedra para esta posição, existem 2 cores para a posição C, 1 para a posição B e a mesma cor para a posição D. Logo, seriam  $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$  modos diferentes do artesão dispor as pedras.

Da mesma forma que a contagem anterior estamos considerando a mesma peça duas vezes no cálculo, portanto são apenas:  $(6 \div 2) = 3$  peças.



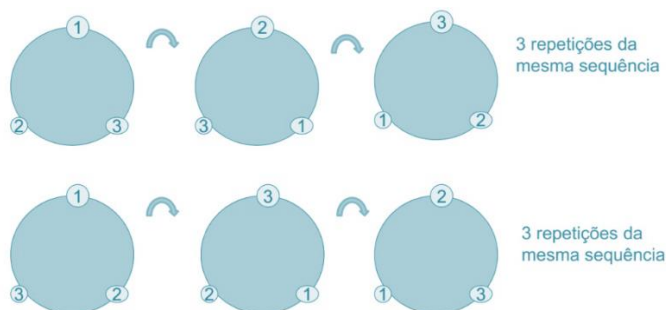
3) Considere-se que as pedras colocadas nas posições A e C sejam da mesma cor bem como as colocadas nas posições B e D: Existem 3 cores para a posição A, escolhida a pedra para esta posição, existe apenas 1 cor para a posição C, 2 para a posição B e a mesma cor para a posição D. Logo, seriam  $3 \times 1 \times 2 \times 1 = 6$  modos diferentes do artesão dispor as pedras.



Ao todo são  $3 + 3 + 6 = 12$  modos diferentes de dispor as pedras.

### PERMUTAÇÃO CIRCULAR

O número de permutações circulares de  $m$  objetos distintos é o número de modos de colocar esses  $m$  objetos em círculo, de forma que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais.



$$P_c = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

### 3.8.2 Referências

ANÁLISE COMBINATÓRIA. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf>

Acesso em: 17 set 2018.

FATORIAL.

Disponível

em:

<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/msg/sd0vsapgggs0sc.pdf> Acesso em: 17 set 2018.

PFC. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/pfc-generalizacao/> Acesso em: 17 set 2018.

PRINCÍPIO

DA

SOMA.

Disponível

em:

[https://galdino.catalao.ufg.br/up/635/o/Notas\\_logica\\_inducao\\_iniciacao\\_matematica.pdf](https://galdino.catalao.ufg.br/up/635/o/Notas_logica_inducao_iniciacao_matematica.pdf)

Acesso em: 17 set 2018.

### 3.8.3 Relatório – 29/09/2018

No dia vinte e nove de setembro de 2018, realizamos um encontro do PROMAT sobre o conteúdo de análise combinatória. Abordamos o princípio fundamental da contagem e permutações simples com e sem repetições.

Perguntamos aos alunos se já conheciam o conteúdo de análise combinatória e explicamos aos quais ainda não conheciam que esta aula seria uma introdução ao conteúdo e que eles poderiam pedir ajuda para esclarecer as dúvidas.

Entregamos o material aos estudantes e realizamos a leitura do primeiro problema, esclarecendo que quando falamos em modos diferentes de viajar entre duas cidades não se trata de ida e volta, caso contrário deveria estar escrito no problema. Esse problema se tratava apenas de interpretação, mas os alunos tiveram diversas respostas erradas por terem pensado pouco sobre a situação e já irem fazendo cálculos.

Já no segundo problema os alunos contaram as possibilidades e, na correção, introduzimos a árvore de possibilidades, pois se tratava de contagem por meio da regra do produto. A árvore das possibilidades auxiliou para mostrar que devemos multiplicar os números dados pela quantidade de possíveis escolhas de cada objeto. Também explicamos que a cada calça escolhida teríamos três opções de camiseta para combinar e para cada combinação de calça e camiseta teríamos quatro chapéus para escolher. Em seguida, aplicamos o problema à realidade em que a maioria dos alunos se enquadra e encontramos um número muito alto de combinações de roupas.

O terceiro problema muitos alunos resolveram listando as possibilidades, pois para eles não era tão fácil aplicar o princípio fundamental da contagem. Assim abriu espaço para mostrar as diferentes abordagens da regra do produto com o método das casinhas. E como esse problema não há reposição dos elementos foi possível introduzir o fatorial. Por último, definimos o que é uma permutação destacando a palavra organizar como sinônimo.

Em seguida houve uma sequência de problemas para que os alunos praticassem o método das casinhas de forma progressiva com diferentes restrições. Isso foi muito importante para que eles se apropriassem do método como uma ferramenta para resolver problemas e também para encontrar maneiras de lidar com restrições, como separar em casos distintos para em seguida somar as possibilidades.

O problema seguinte envolveu o conceito de conjunto complementar em que poucos alunos pensaram dessa forma. Ao resolver o problema no quadro alguns alunos questionaram

como seria a solução que não envolvesse o conjunto complementar, tentamos resolver com a ajuda dos alunos, porém, não obtivemos o resultado correto. Sendo assim, conseguimos mostrar a importância de utilizar essa ideia em que se calcula o total de possibilidades e subtrai-se o conjunto que desfavorável.

O próximo problema foi uma questão da primeira fase da OBMEP. Os alunos pensavam em apenas uma parte da resposta, o que serviu para deixar os alunos mais atentos com todos os tipos de permutações que podem existir em um problema.

Iniciamos então a permutação com repetição para formar números com dez algarismos de forma que poderiam utilizar somente os algarismos 1 e 2. Esse problema foi facilmente resolvido pelos alunos, mas no próximo problema, o qual era aplicado à realidade já não foi fácil, pois não era possível resolvê-lo mecanicamente, era necessário fazer uma transposição do que fizeram com os números para obter diferentes maneiras de escolher diversos objetos. Os alunos, mesmo lidando com os mesmas quantidades e problemas relacionáveis, não tinham noção da quantidade de possibilidades. Ao resolver, atribuímos o algarismo 1 para representar a escolha de um objeto e o algarismo 2 para representar a não escolha de um objeto e, assim, para cada objeto tínhamos duas opções: escolher; ou não escolher. Logo o problema era semelhante ao anterior já resolvido. Mesmo assim, construímos a árvore das possibilidades para mostrar que a possibilidade de não escolher nenhum objeto estava incluída em nossos cálculos.

Por último, abordamos os anagramas, primeiro sem letras repetidas e, em seguida, com várias letras repetidas. O primeiro foi facilmente resolvido, mas o segundo explicamos a resolução devido ao tempo. Explicamos que as letras repetidas quando trocadas de lugar entre si não formavam palavras diferentes, logo deveríamos excluir essas repetições. Assim, mostramos que essas repetições eram dadas pela multiplicação do fatorial do número de letras repetidas e concluímos que o número de permutações era dado pelo fatorial da quantidade de letras da palavra dividido pelo número de repetições.

Ao final dessa aula avisamos aos alunos sobre o retorno das aulas e sobre as listas complementares que poderiam ser muito importantes para o aprendizado.

### **3.9 Plano de aula - 20/10/2018**

**Público-Alvo:** Alunos do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino - NRE CASCAVEL,

inscritos no projeto.

**Tempo de execução:** Um encontro com duração de 4 horas.

**Conteúdo:** Probabilidade.

**Objetivo Geral:** Fazer com que os alunos compreendam a ideia de probabilidade e sejam capazes de resolver problemas que necessitam deste conhecimento

**Objetivos Específicos:** Calcular a probabilidade de se ganhar na mega sena e resolver questões do Enem.

**Recursos Didáticos:** lista de atividades, laboratório de informática, quadro, giz.

### 3.9.1 Encaminhamento Metodológico

#### O conceito de probabilidade

Nos exercícios abaixo além de fazer o cálculo explique como obteve o resultado.

- a) Qual a probabilidade de se obter uma cara no lançamento de uma moeda não viciada?
- b) Qual é a probabilidade de se obter um número primo ao se lançar um dado honesto?
- c) Qual é a probabilidade de se obter um número par ao se lançar um dado honesto?
- d) Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?
- e) Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?
- f) Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Definição: A probabilidade de um evento específico é dada pela seguinte razão:

$$probabilidade = \frac{\text{número de resultados favoráveis a ocorrência do evento específico}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

#### A probabilidade de se ganhar na Mega Sena

1) – Entre no site <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/> e responda as seguintes perguntas:

- a) Quantos números podem ser escolhidos na Mega Sena? Podemos obter números repetidos

na combinação escolhida? A ordem na combinação importa?

b) Como funciona a premiação?

c) Note que no caso de uma aposta com seis números o cálculo da probabilidade é dado pela razão entre a quantidade de combinações que se pode tomar ( que no caso é uma combinação de seis números) e o número de combinações possíveis de seis números. Observando a tabela de preços e probabilidades explique por que a probabilidade de ser premiado aumenta com o aumento do número de possibilidade na combinação escolhida?

d) Utilizando ainda a tabela de preços e probabilidades quantos reais deveriam ser gastos se fosse possível escolher todos os sessenta números da cartela?

e) Tendo em vista que queremos gastar 98 reais com o jogo da mega sena qual é a melhor opção: fazer um jogo de 8 números ou vários de 6 números?

f) Para observar que a possibilidade de se ganhar apostando uma combinação de seis números é pequena entre no site <https://www.socontabilidade.com.br/megasena.php> e faça cinco simulações de jogos e relate quantos números acertou em cada jogada. Note que neste site há um banco de dados dos números que mais saem. O que explicaria isto? Alguns números tem mais chance de sair probabilisticamente falando?

g) Objetivando obter o cálculo da probabilidade de se ganhar na Mega Sena jogando uma combinação de seis números, considere o item c) e calcule o número de combinações possíveis de seis números.

Observação: Para o item g) faremos uma exposição inicial no caso em que a combinação escolhida é de dois números. Inicialmente notemos que no jogo da mega sena não importa a ordem em que os números aparecem na combinação assim como não há reposição. Portanto consideramos o par ordenado ( , ) que representa a combinação de dois números. Assim a primeira entrada tem 60 possibilidades e como não há reposição a segunda entrada tem 59 possibilidades – os números são de 1 a 60. Pelo principio fundamental da contagem o número de pares assim definido é dado pelo produto  $60 \cdot 59 = 3540$ . No entanto com essa conta estamos contando duas vezes o mesmo para já que no jogo da mega sena não importa a ordem. Por exemplo a combinação  $(03, 24) = (24, 03)$ . De maneira geral para  $a, b = 1, \dots, 60$  temos que a combinação  $(a, b) = (b, a)$ . Portanto para obter a quantidade de pares nos quais não há reposição e a ordem não importa é dado pelo número  $\frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$ . Neste caso pela definição temos que a probabilidade de se obter uma combinação de dois elementos é dada por  $\frac{1}{1770}$ . Analogamente faz-se para o caso 3, 4, 5 e 6.

Observação: Depois deste comentário sera dado um tempo para que os alunos tentem intuir os



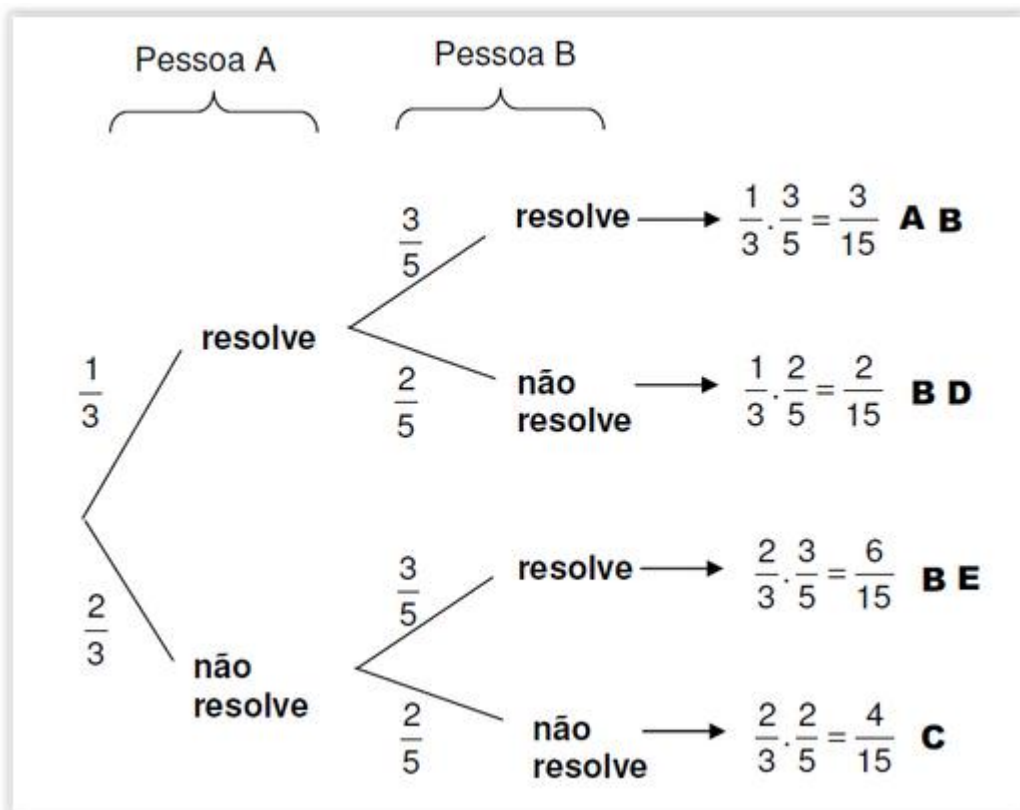
próximos passos até chegar na combinação com seis elementos. Em seguida o professor fara a formalização no quadro.

### Utilizando o diagrama de árvore

As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são:  $P(A) = 1/3$  e  $P(B) = 3/5$ . Admitindo que as duas pessoas tentem resolver o problema de forma independente, qual a probabilidade de que:

- a) ambos resolvam o problema?
- b) ao menos um resolva o problema?
- c) nenhum resolva o problema?
- d) A resolva o problema, mas B não?
- e) B resolva o problema, mas A não?

Resolução:



### Problemas

**Problema 1:** (ENEM 2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

### Campanha de vacinação contra a gripe suína

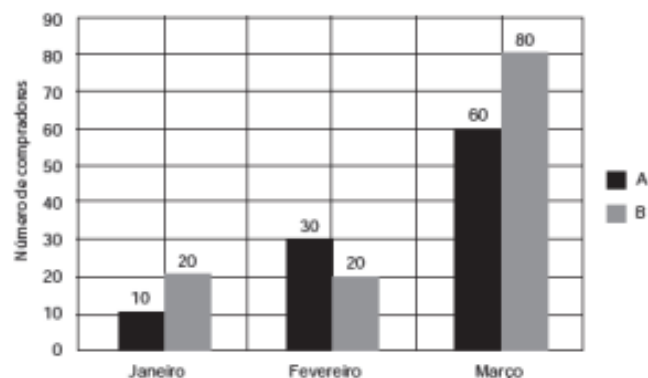
Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é?

*Solução:* O número de casos possíveis é dado pela soma da quantidade de pessoas vacinadas, ou seja, 200. O número de casos favoráveis é dado pelo número de portadores de doenças crônicas, ou seja, 22. Portanto a probabilidade é dada por  $\frac{22}{200} = \frac{11}{100}$ .

**Problema 2:** (ENEM 2013) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico

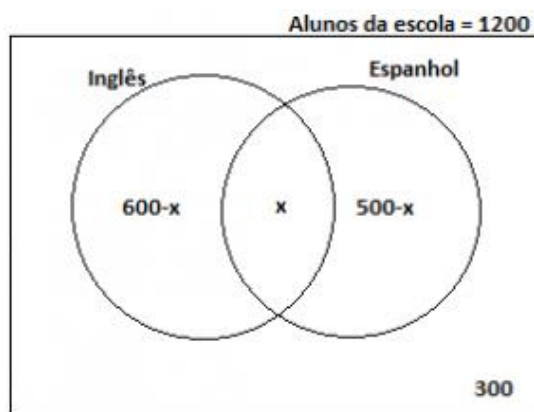


A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

*Solução:* Estamos interessados em calcular a probabilidade da intersecção o qual está caracterizado pela palavra e. No caso os dois eventos são independentes o que nos leva ao produto das probabilidades. Assim temos que a probabilidade do sorteado em relação ao produto A é dada pela razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados possíveis. Analogamente temos a mesma ideia para o produto B e obtemos portanto as respectivas razões  $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$  e  $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ . Logo temos que o resultado esperado é  $\frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = 1/20$ .

**Problema 3:** (ENEM 2013) Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

*Solução:* Inicialmente temos que fazer a contagem dos casos favoráveis e casos possíveis. O enunciado fornece informações para que possamos calcular o número de alunos que falam simultaneamente as duas línguas. Este cálculo é feito utilizando o diagrama de Venn que nos resulta (considerando  $x$  o número de alunos que falam as duas línguas)  $600 - x + x + 500 - x + 300 = 1200$  donde  $x = 200$ .



Assim temos que a quantidade de alunos que falam apenas espanhol é 300. Falta calcular os casos possíveis. Como já sabemos que os alunos em questão não falam inglês então o número de casos possíveis é  $1200 - 600 = 600$ . Portanto a probabilidade desejada é  $\frac{1}{2}$ .

**Problema 4:** Um experimento foi conduzido com o objetivo de avaliar o poder germinativo de

duas culturas de cebola, conforme a tabela.

**Germinação de sementes de duas culturas de cebola**

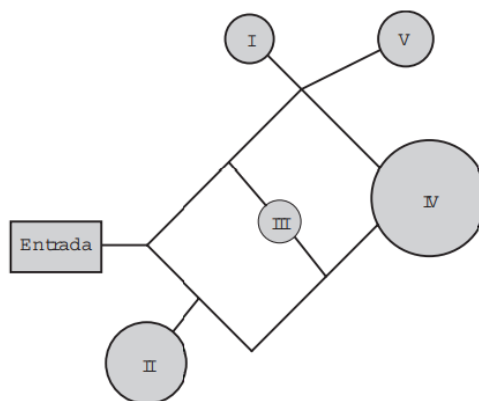
Culturas	Germinação		TOTAL
	Germinaram	Não Germinaram	
A	392	8	400
B	381	19	400
TOTAL	773	27	800

BUSSAB, W. O.; MORETIN, L. G. Estatística para as ciências agrárias e biológicas (adaptado).

Desejando-se fazer uma avaliação do poder germinativo de uma das culturas de cebola, uma amostra foi retirada ao acaso. Sabendo-se que a amostra escolhida germinou, a probabilidade de essa amostra pertencer à Cultura A é de?

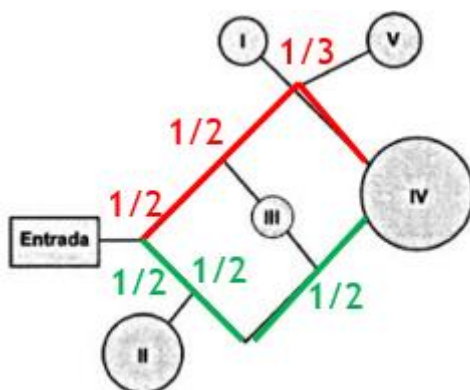
*Solução:* O número de casos favoráveis é dado por 392, pois estamos interessados em saber a probabilidade da amostra pertencer a cultura A, dado que germinaram. O número de casos possíveis é dado por 773, já que é o total dos que germinaram. Portanto a probabilidade desejada é dado por  $\frac{392}{773}$ .

**Problema 5:** Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna. Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a?

*Solução:* Note que nas condições dadas temos dois caminhos:



Já que em qualquer dos dois caminhos marcados temos uma sucessão de vértices e a tomada de decisão em cada vértice independe da tomada de decisão nos outros vértices, temos que a probabilidade em cada caminho é dada pelo produto nos respectivos vértices. Portanto a probabilidade desejada é a soma das probabilidades encontradas nos dois caminhos, ou seja,

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

**Problema 6:** ( Enem 2015) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%. A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de?

*Solução:* Temos que a probabilidade de chover sábado é 30%. A probabilidade de não chover no domingo é 75%. Portanto a probabilidade desejada é dada pelo produto dessas probabilidades, ou seja, 22,5%.

### Atividades Complementares

**Problema 7:** ( Enem 2013) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu 54/100 do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, 25/1000 eram defeituosos. Por sua vez, 38/1000 dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < 2/100$  Excelente

$2/100 \leq P < 4/100$  Bom

$4/100 \leq P < 6/100$  Regular

$6/100 \leq P < 8/100$  Ruim

$8/100 \leq P \leq 1$  Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como?

**Problema 8:** (Enem 2014) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiras ou falsas e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20. A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é?

**Problema 9:** (Enem 2015) Um protocolo tem como objetivo firmar acordos e discussões internacionais para conjuntamente estabelecer metas de redução de emissão de gases de efeito estufa na atmosfera. O quadro mostra alguns dos países que assinaram o protocolo, organizados de acordo com o continente ao qual pertencem. Em um dos acordos firmados, ao final do ano, dois dos países relacionados serão escolhidos aleatoriamente, para verificar se as metas de redução do protocolo estão sendo praticadas. A probabilidade de o primeiro país escolhido pertencer à América do Norte e o segundo pertencer ao continente asiático é?

### **3.9.2 Referências**

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Inep. Disponível em: <[www.inep.gov.br/](http://www.inep.gov.br/)>. Acesso em: 04 ago. 2018.

### **3.9.3 Relatório – 20/10/2018**

Neste dia, trabalhamos com probabilidade. O conteúdo foi exposto de forma dinâmica e diferenciada, com jogos e situações problemas, sempre iniciando através de situações práticas permitindo a avaliação dos conhecimentos prévios dos discentes sobre o assunto exposto, explorando a interpretação, para que os mesmos construíssem os conceitos dos conteúdos abordados. Inicialmente, foi feito o estudo do conteúdo de Estatística, explicando a importância de estudarmos e adquirirmos tal conhecimento, mostrando as necessidades e utilidades nos dias atuais, identificando assim algumas aplicações da estatística em áreas no nosso cotidiano.

Foi aplicado um questionário com o objetivo de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos. Usamos neste conteúdo também jogos de azar, situações nas quais os alunos precisavam dialogar e usar a intuição, trabalhando algumas discussões sobre sorte, aleatoriedade e noções de Probabilidade. O jogo levaram os alunos a pensar e construir estratégias de resolução, tais como o jogo “Cara ou Coroa”, utilizando moedas e o “Jogo da mega sena”, utilizando experimentos com material concreto tornando a aula mais atraente e participativa.

As dificuldades neste conteúdo foram observadas, mais pela separação dos eventos, dos casos possíveis; mas com explanação dos conceitos abordados em sala, os alunos internalizavam e construía o conhecimento desse novo conceito apresentado, sanando assim as dúvidas sobre esse assunto. Portanto, ao trabalhar desse modo, nós estagiários na função de professores estávamos realizados por ter atingido as expectativas esperadas em relação à aprendizagem dos alunos e a nossa formação docente de modo eficiente, prático, discursivo e inovador.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa experiência nessa etapa do estágio foi muito proveitosa, pois foi aí que colocamos em prática os conhecimentos metodológicos adquiridos até o momento no curso de graduação, participando efetivamente no processo de construção do saber de vários jovens.

Podemos afirmar ainda que o crescimento não foi só da parte dos alunos. Foi necessário empenho e dedicação para encontrar a maneira adequada de apresentar os conteúdos; e devido à pouca experiência, as dúvidas eram muitas. Por meio deste estágio, pudemos aperfeiçoar a prática em sala de aula. Nem tudo que planejamos saiu de acordo com o esperado, o que certamente é comum nessa profissão, de modo que devemos estar sempre preparados para qualquer situação e estar dispostos a aprender com os erros.

Destacamos ainda, principalmente, a importância de ter uma aula bem planejada, na qual se busque prever situações que possam vir a acontecer. Na prática também, aprendemos a importância de estar sempre atentos ao desenvolvimento dos alunos, para que possamos compreender as suas dúvidas e, assim, conseguir saná-las. Várias vezes, no decorrer das aulas nos deparamos com situações que não estavam previstas, pois os alunos apresentaram muitas dúvidas que pensamos não possuírem. Fomos aprendendo durante os encontros a prestar atenção nessas dificuldades, buscando ajudar os alunos nesses pontos, apesar de isso não estar programado no planejamento da aula. Com isso, percebemos que, apesar da necessidade de seguirmos um planejamento feito com antecedência, nunca poderemos prever completamente como a aula será.

Portanto, aprendemos muito nessa etapa e certamente continuaremos sempre aprendendo, pois, para nós, assim que deve ser a postura de um professor, em hipótese alguma pode pensar que já sabe tudo que deveria, mas precisa ter ciência de que seu aperfeiçoamento e aprendizagem se dará a cada dia na sala de aula. Afirmamos que não é fácil ser professor atualmente, os desafios são muitos e por vezes parecem complicados demais e é justamente por isso que precisamos de pessoas com amor pelo que fazem, para que o ato de ensinar não seja um fardo, mas sim um constante aprendizado.



## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol.25, num. 41, dezembro, 2011, PP. 73-98, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

Brasil. Parâmetros curriculares nacionais (PCNs). Ensino fundamental e Médio. Brasília: MEC/SEF, 1998.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

MARINHO, Erisson Dos Santos; SANTOS, Leticia De Oliveira; BARROS, Amauri Da Silva. A CONTEXTUALIZAÇÃO DA MATEMÁTICA NO ENEM: AVANÇOS E RETROCESSOS. *Saberes Docentes em Ação, Maceió*, v. 04, n. 01, p. 1-45, abr. 2018.

PASSOS, MARINEZ MENEGHELLO; OLIVEIRA, BRUNO KERBER; SALVI, ROSANA FIGUEIREDO. As Questões de “Matemática e suas Tecnologias” do “Novo ENEM”: um olhar com base na Análise de Conteúdo. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 315-335, ago. 2011.

RIBEIRO, Flávia Martins; PAZ, Maria Goretti. O ensino da matemática por meio de novas tecnologias. *Revista Modelos, Rio grande do Sul*, v. 02, n. 02, p. 1-30, ago. 2012.